

## LETTRES A LA RÉDACTION

PRINCIPE DE MACH  
ET UNIVERS EN EXPANSIONPAR O. COSTA DE BEAUREGARD,  
Institut Henri-Poincaré, Paris.

On sait que les théories relativistes confirment à beaucoup d'égards les idées de Mach sur l'explication de l'inertie. En relativité restreinte, la mécanique analytique du point électriquement chargé, sous sa forme explicitement covariante, montre que le tenseur métrique de Minkowski  $g_{\mu\nu}^0$  joue le rôle d'un potentiel d'inertie ; la relativité générale interprète ce même tenseur comme étant un fond non nul au potentiel de gravitation total  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$  ; Einstein [1] a montré en détail comment plusieurs « effets Mach » se retrouvent théoriquement en relativité générale.

L'on sait aussi que, pour établir sa théorie du cosmos statique globalement sphérique, Einstein a développé des arguments s'inspirant en partie de Mach. Que le résultat ainsi obtenu soit en effet très conforme aux idées de Mach, c'est ce que nous allons montrer par un argument que nous croyons inédit, et qu'une fort intéressante remarque de D. Park [3] nous a suggéré.

Observons d'abord que si les unités choisies sont telles que le facteur  $K$  de la formule de Galilée  $F = Km\gamma$  diffère de 1, l'élimination de  $F$  entre cette formule et celle de Newton  $r^2 F = Gmm'$  montre que, en théories de la gravitation,  $G/K$  devra remplacer  $G$ .

Compte tenu de cette remarque, une conséquence connue de la théorie du cosmos sphérique d'Einstein s'écrit

$$GM/Kc^2 R = \pi/2 \text{ ou } K = 2GM/\pi c^2 R ; \quad (1')$$

$M$  désigne la masse totale du cosmos,  $R$  le rayon de la sphère spatiale,  $c$  la vitesse de la lumière. L'expression  $2GM/\pi c^2 R$  représente un potentiel de gravitation, sous la forme sans dimension familière en relativité générale,  $\pi R/2$  n'est autre que le quart du méridien de l'hypersphère ; l'on peut donc considérer que le nombre  $K$  représente le potentiel de gravitation moyen du cosmos, ou « potentiel de fond » responsable de l'inertie. Choisir l'unité de force telle que  $K = 1$  c'est, *ipso facto*, en théorie du cosmos statique, poser égal à 1 le potentiel gravitationnel moyen, ou potentiel d'inertie. D. Park [3] a pu trouver, à un facteur numérique près, la formule (1), en s'appuyant uniquement sur les idées de Mach et sur l'analyse dimensionnelle.

Ces considérations invitent clairement à rechercher si les théories de cosmos sphérique en expansion ne mettraient pas en évidence des effets Mach liés à la variation en  $1/R$  du potentiel gravitationnel moyen ;

c'est volontairement que nous nous limitons à la considération des cosmos à courbure positive, les seuls où le volume de l'espace et la masse totale soient finis.

Complétons d'abord par quelques remarques ce qu'on dit d'habitude [2] du mouvement inertial d'un point matériel dans ces cosmos.

Les notations étant classiques [2], et  $a$  désignant une constante d'intégration, la formule de conservation, par transport parallèle, de l'impulsion s'écrit

$$R^2 m \, d\chi/dt = ca \quad \text{ou} \quad Rm\beta = a : \quad (2)$$

dans l'espace euclidien 4-dimensionnel où est plongée l'hypersphère spatiale, il y a conservation du moment cinétique par rapport au centre de l'hypersphère.

Compte tenu d'une formule de L. de Broglie,  $h$  désignant la constante de Planck et  $k/2\pi$  la fréquence spatiale de l'onde associée au mobile, la formule (2) se réécrit

$$hRk = 2\pi ca ; \quad (3)$$

ceci rend compte de l'effet Hubble-Humason, où l'on mesure en effet une fréquence spatiale au moyen d'un étalon de longueur matériel.

La formule de conservation, par transport parallèle, de la masse s'écrit

$$c^2 dm + (m\dot{v}^2/R) dR = 0 : \quad (4)$$

*l'énergie utilisable perdue par le mobile parcourant un grand cercle de l'hypersphère égale le travail de la force centrifuge lié à la variation du rayon ; « elle disparaît dans la dimension inexplorable de l'espace 4-dimensionnel ».*

Les formules (2) et (4) ont la conséquence

$$m^2(1 - \beta^2) = \text{const.} \equiv m_0^2 : \quad (5)$$

*la masse propre du mobile se conserve.* C'est donc seulement la direction  $u_\nu$ , et non le module  $m_0$ , de l'impulsion-énergie  $m_0 u_\nu$ , dont la mesure varie.

Les formules (2) et (5) se réécrivent

$$m\beta = a/R, \quad m^2 - m_0^2 = a^2/R^2 ; \quad (6)$$

si, pour fixer les idées, l'on considère un cosmos de Lemaitre, afin que le cas statique d'Einstein soit solution, et que l'on note par un indice 0 supérieur les mesures afférentes au cas statique, que l'on suppose enfin les unités telles que  $K^0 = 1$ , la formule (6) pour l'impulsion exhibe un « effet Mach » conforme à la formule

$$K = R/R^0 \quad \text{ou} \quad K = (2GM/\pi c^2 R_0^2) R ; \quad (7)$$

il faut remarquer que  $K$ , bien qu'ayant dimension de

potentiel newtonien, varie en raison inverse du potentiel gravitationnel moyen du cosmos.

La formule (6<sub>2</sub>) suit de la précédente et de la constance de la masse propre. Elle admet deux expressions asymptotiques intéressantes. Si (cas de la mécanique newtonienne)  $m - m_0$  est petit devant  $m_0$ , l'on a

$$(1/2c^2) \text{ force vive} \equiv m - m_0 \simeq (1/2m_0) a^2/R^2; \quad (8)$$

si, au contraire (cas, par exemple, du photon)  $m_0$  est petit devant  $m - m_0$ , alors

$$\beta \simeq 1, \quad m \simeq a/R. \quad (9)$$

Voici une ultime remarque. L'hypothèse d'une masse  $M$  constante est essentielle aux théories de Friedman et de Lemaitre. Il est donc nécessaire d'admettre que le travail de la force centrifuge des mobiles (responsable de l'effet Hubble-Humason) se retrouve comme masse dans le cosmos. L'on devra dire, équivalamment, qu'une densité d'énergie de radiation statistiquement isotrope se trouve émise, ou que le travail d'une pression isotrope de radiation égale le travail précédemment considéré (la conservation de l'énergie, seule, pose un problème, car il y a conser-

vation statistique de l'impulsion du fait du choix du repère).

Que peut être cette radiation, qu'il est indispensable de faire entrer en ligne de compte ? Sans vouloir en construire ici une théorie effective, en distinguant au départ dans le tenseur matériel un petit terme représentatif de la matière en mouvement, disons qu'il semble tentant de postuler qu'il s'agit d'une émission de « gravitons libres » résultant conjointement du phénomène de l'expansion, et de la présence de corps matériels et de photons en mouvement par rapport au référentiel statistiquement propre.

Manuscrit reçu le 7 août 1956.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] EINSTEIN (A.), Quatre conférences sur la relativité, Paris, 1925, 4<sup>e</sup> conférence.
- [2] MINEUR (H.), L'univers en expansion, Paris, 1933, p. 25-39.
- [3] PARK (D.), *Journal de Physique*, 1957, 18, 11 (Appendice).