

Le potentiel vecteur dans une expérience de Tonomura

O. COSTA DE BEAUREGARD, G. LOCHAK

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris

RÉSUMÉ. L'une des expériences d'interférence électronique de Tonomura où un petit aimant toroïdal placé en aval d'un "biprisme" met en évidence l'effet Aharonov-Bohm laisse voir les franges sinueuses raccordant à travers l'ombre de l'aimant les franges de Fresnel mutuellement décalées. On lit directement sur la photographie que l'équation des franges est donnée par l'équation universelle de Louis de Broglie $\mathbf{k} = h^{-1}(\mathbf{mv} - e\mathbf{A})$; le potentiel vecteur irrotationnel de l'aimant est ainsi mesuré localement dans la jauge adhérente à la source. On suggère que dans un test complémentaire le film enregistreur soit placé juste avant plutôt que juste après l'aimant.

ABSTRACT. One of Tonomura's experiments where a small toroidal magnet placed after an electronic "biprism" evidences the Aharonov-Bohm effect displays the sinuous fringes connecting through the magnet's shadow the mutually shifted Young fringes. One reads directly on the photograph that the fringes equation is given straightaway by de Broglie, universal formula $\mathbf{k} = h^{-1}(\mathbf{mv} - e\mathbf{A})$; the magnet's curlless vector potential is thus measured locally in the source adhering gauge. A confirmatory test with the film placed just before rather than just after the magnet is proposed.

1 Les vues de Louis de Broglie concernant l'invariance de jauge

Nous avons bien connu Louis de Broglie et savons ce qu'il pensait sur l'invariance de jauge ; il en parlait souvent et a parfois écrit [1]. Il estimait que la valeur $\nu_0 = c^2 h^{-1} \mu$ de la fréquence propre qu'il avait attribuée à l'électron est une grandeur physique, et donc que la jauge du 4-potentiel figurant dans sa loi d'équivalence [2]

$$\hbar \mathbf{k}^i = P^i \equiv \mu U^i - e A^i, \quad U_i U^i = -c^2 \quad (1)$$

est fixée; il refusait pour ainsi dire à l'invariance de jauge le droit d'infliger à l'électron une arythmie cardiaque.

Alors, que représente la fréquence spatiale \mathbf{k} mesurée comme $\hbar \mathbf{k} = m\mathbf{v}$ par interférence cristalline ? Mourier [3] observe que la mesure est faite au sein du magnétisme terrestre, il affirme que le potentiel vecteur \mathbf{A} est énorme, de l'ordre de $R\mathbf{B}$, R et B désignant le rayon et le champ magnétique terrestres, et que \mathbf{A} subsiste même si le champ \mathbf{B} est compensé par des bobines de Helmholtz. Observons d'abord que, dire que le potentiel \mathbf{A} est "énorme", c'est supposer déjà le choix d'une jauge. Ensuite, s'il en est ainsi, de deux choses l'une: soit la formule de de Broglie n'est pas universelle (puisque le $\hbar \mathbf{k}$ mesuré est l'impulsion cinétique $m\mathbf{v}$ et pas l'impulsion canonique); soit la 4-fréquence de l'électron n'est pas mesurable (puisque même en l'absence de sources électromagnétiques on peut y inclure un 4-gradient arbitraire).

Une comparaison sera instructive. D'après la mécanique de Newton l'impulsion d'un point matériel en mouvement inertiel est $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \mathbf{const.}$; $m\mathbf{v}$ seul est mesurable. Alors de deux choses l'une: soit la formule de Newton n'est pas universelle, soit l'impulsion du point matériel libre n'est pas mesurable.

Nous voilà en pleine philosophie des sciences ; un recours à deux maîtres de la discipline pourra être instructif.

Duhem, dans *La théorie physique, son objet, sa structure*, explique qu'un fait expérimental n'impose pas, mais permet et suggère une hypothèse. Poincaré, dans *La science et l'hypothèse*, argue qu'une hypothèse équivaut à une définition, qu'elle ne peut être dite vraie mais seulement commode disons, logiquement économique, et peut-être paradoxale comme le fut l'héliocentrisme. Et bien sûr, l'énoncé clair d'une hypothèse peut suggérer un test expérimental.

Voyons à cette lumière le problème en cours. De même, il serait "incommode" de déclarer non mesurable l'impulsion du point matériel en mouvement inertiel, ainsi de Broglie trouve insatisfaisant de penser que la fréquence propre de l'électron est indéterminée. On pourrait arguer que, le fait que l'interférence cristalline ne mette pas en évidence le \mathbf{A} du magnétisme terrestre signifie qu'elle est un phénomène électrique et non pas d'un phénomène magnétique ; " \mathbf{A} n'aurait pas voix au chapitre".

Mais l'effet Aharonov-Bohm (A.B.) est un phénomène interférentiel impliquant le magnétisme; il devrait donc permettre une mesure de \mathbf{A} . Si le \mathbf{A} terrestre n'apparaît pas dans l'effet A.B. c'est que, pour quelque raison, n'est pas décelable à cette échelle.

L'effet A.B. le plus simple est la diffraction par un fil droit piégeant un flux Φ ajustable. Si Φ est varié les franges se déplacent, ou plutôt, leurs intensités sont variées. Sous cette forme le phénomène ne se prête pas à une mesure et à une discussion précises ; mais c'est ce que permet un ingénieux dispositif de Tonomura [4] où un aimant toroïdal est associé à un "biprisme électronique".

2 Quantification du flux d'un aimant autistique

Il a été prouvé [5] que le flux Φ piégé dans un "aimant autistique" est essentiellement quantifié en unités $h/2e$ parce qu'une onde électronique évanescence entoure l'aimant et qu'elle doit être résonante ; la quantification du flux Φ est ainsi corollaire de celles de l'action ou du moment angulaire de l'électron. Notons (c'est très significatif) que la non-adiabaticité de la surface de l'aimant est inhérente au phénomène.

Que le quantum de flux soit $h/2e$ plutôt que h/e est dû au spin de l'électron. Ce quantum $h/2e$ est mis en évidence par les expériences de Tonomura [4] où les franges de Young-Fresnel, soit se prolongent à travers l'ombre de l'aimant, soit sont alternées blanc-noir, selon que le nombre de quanta de flux est pair ou impair.

L'existence d'une onde électronique évanescence autour d'un aimant autistique (et aussi autour d'un circuit supraconducteur) implique un excès de radicalité dans l'énoncé que "le potentiel vecteur d'un aimant autistique est rigoureusement irrotationnel" : un \mathbf{j} évanescence et donc un \mathbf{B} évanescence entourent l'aimant (il existe donc entre deux aimants autistiques une très faible interaction). Le \mathbf{B} non nul mais très faible a son importance dans la genèse de l'effet A.B.

3 Commentaire sur une expérience de Tonomura

Tonomura [4], dans diverses expériences d'interférence électronique, utilise un dispositif "biprisme" ou "bifente" suivi d'un très petit aimant toroïdal. Soit z l'axe de l'aimant, perpendiculaire au plan du film enregistreur et à celui du dispositif "bifente", x un axe parallèle aux "fentes". La photographie montre l'ombre annulaire de l'aimant, qui est de type géométrique (sans anneaux de diffraction) et en dehors de cette ombre

les franges rectilignes de Young-Fresnel. De par l'effet Aharonov-Bohm celles-ci subissent un décalage transversal à travers l'ombre annulaire, décalage que les expériences mettent en claire évidence.

La première d'entre elles, qui nous intéresse ici, montre de plus les franges sinueuses intermédiaires (fig.1); l'aimant toroïdal, transparent aux électrons, laisse voir les franges sinueuses reliant les franges rectilignes extérieures et intérieures à son "ombre".

Lue phénoménologiquement sur la photographie (fig.1) l'équation des franges est

$$d\varphi = \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

avec pour expression de la fréquence spatiale

$$\mathbf{k}(r) = \hbar^{-1} [m\Delta\mathbf{v} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (3)$$

m désigne la masse et e la charge de l'électron; $\Delta\mathbf{v}$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sont deux vecteurs contenus dans le plan de figure dont on va discuter l'interprétation.

La distance du biprisme au film détecteur étant grande devant l'interfrange, l'interférence a lieu entre deux ondes planes de fréquences vectorielles très voisines dont la différence $\Delta\mathbf{v}$, parallèle au plan de figure, est directement mesurable sur l'interfrange extérieur à l'ombre de l'aimant,

Le vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est affiché comme radial, nul hors de l'ombre, constant en grandeur dans l'ombre, centripète ou centrifuge suivant le sens de circulation du vecteur induction \mathbf{B} ; il est directement mesurable sur l'interfrange le long du diamètre de direction x ; le rapport $-e\mathbf{A}(\mathbf{r})/m\Delta\mathbf{v}$ est en évidence sur la pente des franges le long du diamètre de direction x . On peut ainsi compter, entre l'intérieur et l'extérieur de l'aimant, en fonction du rayon r , le nombre de quanta de flux $h/2e$ piégés.

De tout cela nous concluons que le $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ affiché sur la photographie est le potentiel vecteur tangent à la face postérieure de l'aimant, les franges de l'impulsion potentielle $-e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ étant des cercles équidistants.

Conclusion : Les photographies de Tonomura contiennent une mesure locale du potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dans le plan du film.

4 Proposition d'un test crucial

Puisque (selon nous) le vecteur fréquence spatiale de Louis de Broglie

$$\hbar\mathbf{k}(\mathbf{r}) = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

est ici mesuré, plaçons le film enregistreur au contact de l'aimant mais juste avant plutôt que juste après. La prédiction est que le \mathbf{B} évanescents mettra en évidence un fantôme d'aimant, en ce sens que des franges sinusoïdales seront visibles, reliant des franges rectilignes de Young-Fresnel mutuellement décalées.

Tel est un défi expérimental proposé à Tonomura l'aimant utilisé étant bien entendu le même que dans l'expérience qu'on vient de résumer.

5 Remarques sur les expériences de seconde génération de Tonomura

A l'instigation de Yang, Tonomura [4] a perfectionné l'aimant autistique en le revêtant d'une enveloppe supraconductrice, ce qui a rendu les franges sinusoïdales inobservables mais permis de saisissantes démonstrations de "l'effet A.B." (fig.2) avec un flux piégé soit entier soit demi-entier à la satisfaction des dévôts de l'invariance de jauge pour qui le contour d'intégration fermé est prescrit par le rituel. Mais c'est oublier que la non-adiabaticité de la surface de l'aimant est essentielle [2] à la génération du phénomène même si un revêtement supraconducteur rend l'aimant parfait.

Nous suggérons donc que "juste pour voir", dans les expériences utilisant l'aimant autistique parfait, le film enregistreur soit placé à son contact, juste avant plutôt que juste après. Peut-être les franges sinusoïdales seront-elles encore visibles : un récent article de Stephens [6] commente la phénoménologie de l'onde évanescence extérieure à un supraconducteur.

6 Conclusions

Nous suggérons, au vu des photographies de Tonomura montrant les franges sinusoïdales reliant à travers l'ombre de l'aimant les franges rectilignes issues du "biprisme", que le potentiel vecteur irrotationnel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ s'y trouve mesuré dans la jauge adhérente à la source, et donc qu'un effet local sous-tendant l'effet intégral A.B. est mis en évidence. Nous proposons un test crucial. Tel est notre pari.

7 Annexe. Expression de la phase attachée à un aimant toroidal filiforme

Le potentiel vecteur d'un aimant toroidal filiforme (non nécessairement circulaire) piégeant un flux F a l'expression

$$\mathbf{A} = \Phi \int r^{-3} \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (5)$$

Notant A l'angle solide sous lequel l'aimant est vu de \mathbf{r} on peut exprimer la variation de l'action potentielle comme $-e \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -e\Phi dA$ puis, n notant le nombre (positif ou négatif) de quanta de flux piégés, la phase potentielle attachée à l'aimant comme

$$\varphi = nA. \quad (6)$$

Références

- [1] L. de Broglie, Optique électronique et corpusculaire, Hermann Paris 1950 p. 47.
- [2] L. de Broglie, Annales de Physique, **3**, 22, (1925).
- [3] Mourier G., Communication personnelle, (2000).
- [4] Y. Tonomura, The quantum world unveiled by electron waves, World Scientific Singapore 1998; voir notamment pp. 107 et 113.
- [5] O. Costa de Beauregard et J.M. Vigoureux, Flux quantization in autistic magnets, Phys. Rev. **D9** 1626, (1974).
- [6] G. Stephens (2000), Annales de la Fondation Louis de Broglie 25 27.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 2000, révisé le 27 octobre 2000)