MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur dix relations conséquences des équations de Dirac.* Note de M. **Olivier Costa de Beauregard.**

Pour alléger l'écriture du calcul et des résultats, il est avantageux d'utiliser un symbolisme condensé dû à M. G. Juvet; désignons par $\underset{\rightarrow}{\partial^i}$ l'opérateur différentiel partiel habituel agissant à droite, et introduisons l'opérateur analogue $\underset{\leftarrow}{\partial^i}$ agissant à gauche, de manière à pouvoir écrire l'équation symbolique de Dirac et son associée de Pauli sous la forme ($\mu_0 = m_0 c . 2\pi/h$,

$\varepsilon = 2\pi e/ch$),

$$\{\gamma_l(\overrightarrow{\partial^l} - i\varepsilon A^l) + \mu_0\}\psi = 0, \qquad \psi^\times\{(\overleftarrow{\partial^l} + i\varepsilon A^l)\gamma_l - \mu_0\} = 0. \tag{1}$$

Enfin, définissons l'opérateur différentiel antisymétrique $[\partial^l]$ suivant

$$[\partial^l] = \overrightarrow{\partial^l} - \overleftarrow{\partial^l};$$

les $[\partial^l]$, de même que les γ_l, agissent à la fois à droite et à gauche.

Cela étant, choisissant successivement, dans le tableau des 16γ, une matrice γ des cinq ordres 0, 1, 2, 3, 4, multipliant (1_1) à gauche par $\psi^\times\gamma$, (1_2) à droite par $\gamma\psi$, ajoutant et retranchant, on fait apparaître les $5 \times 2 = 10$ relations tensorielles suivantes :

	(A)	(B)
I.	$\partial_l(j^l) = 0,$	$\{T_l^l\} = -2\mu_0\{\omega^1\},$
II.	$\partial_k(m^{kl}) - \{k^l\} = 2\mu_0(j^l),$	$\partial^l(\omega^1) - \{K^l\} = 0,$
III.	$\overline{\partial^l(j^k) - \partial^k(j^l)} - \{S^{kl} - S^{lk}\} = -2\mu_0(\overline{m^{kl}}),$	$\overline{\partial^l(\sigma^k) - \partial^k(\sigma^l)} - \{T^{kl} - T^{lk}\} = 0,$
IV.	$\partial_l(\overline{m^{il}}) + \{l^l\} = 0,$	$\partial^l(\omega^2) + \{L^l\} = -2\mu_0(\sigma^l),$
V.	$\{S_l^l\} = 0,$	$\partial_l(\sigma^l) = -2\mu_0(\omega^2),$

avec, par définition des onze tenseurs qui y figurent [1],

$$(\omega^1) = \psi^\times\psi, \quad (j^l) = \psi^\times\gamma^l\psi, \quad (m^{il}) = \psi^\times\gamma^{il}\psi; \quad (\sigma^l) = \psi^\times\gamma^{-l}\psi, \quad (\omega^2) = \psi^\times\bar\gamma\psi,$$
$$\{k^l\} = \psi^\times\ [\partial^l]\psi - 2i\varepsilon(\omega^1)A^l, \qquad \{K^l\} = \psi^\times\gamma^{il}[\partial_i]\psi - 2i\varepsilon(m^{il})A_i,$$
$$\{l^l\} = \psi^\times\bar\gamma\,[\partial^l]\psi - 2i\varepsilon(\omega^2)A^l, \qquad \{L^l\} = \psi^\times\bar\gamma^{il}[\partial_i]\psi - 2i\varepsilon(\overline{m}^{il})A_i,$$
$$\{S^{il}\} = \psi^\times\bar\gamma^i[\partial^l]\psi - 2i\varepsilon(\sigma^i)A^l, \qquad \{T^{kl}\} = \psi^\times\gamma^k[\partial^l]\psi - 2i\varepsilon\,(j^k)\,A^l;$$

dans ces formules, les $\gamma^{ij\cdots}$ désignent les produits de matrices $\gamma^i\gamma^j\ldots$; les matrices et les composantes tensorielles duales sont surmontées d'une barre, $\bar\gamma$, par exemple, s'entendant pour *duale de* γ^{1234}. Enfin, nous n'avons fait figurer que les tenseurs densitaires *abstraits*, c'est-à-dire dépourvus de leurs coefficients physiques (et éventuellement du facteur i qui rétablirait le caractère de réalité convenable).

Des onze tenseurs précédents, les cinq premiers sont bien connus en théorie de Dirac, ainsi que le *courant de convection* de W. Gordon $\{k^l\}$ [2] et que le *tenseur inertique non symétrique* de H. Tetrode $\{T^{kl}\}$ [3]. Des dix relations écrites, I(A), II(A) (Gordon) et V(B) (Uhlenbeck et Laporte) sont classiques. Nous réservons l'interprétation de III(B), qui a été donnée par Tetrode, au moyen d'un raisonnement de dynamique relativiste non quantique. Quant aux autres relations, III(A) fournit une décomposition de

---

(1) Le caractère tensoriel de toutes ces grandeurs est évident pour un changement de repère galiléen effectué à la première manière de Von Neumann.

(2) *Zeits. f. Phys.*, 50, 1928, p. 630.

(3) *Zeits. f. Phys.*, 49, 1928, p. 858.

la densité de moment électromagnétique, avec un premier terme $\partial^l(j^k) - \partial^k(j^l)$ très *intuitif*, et un second terme égal au *défaut de symétrie* de notre nouveau tenseur $\{S^{kl}\}$; V(A) exprime que la trace de $\{S^{kl}\}$ est toujours nulle, et IV(A) permet d'interpréter $\{l^l\}$ comme la densité de courant de polarisation magnétique; I(B) égale à un facteur près la trace du tenseur de Tetrode au premier invariant, et permet donc d'interpréter (ω^2) comme la *densité de masse propre*; II(B) et IV(B) font intervenir les gradients d'Univers des deux invariants, IV(B) fournissant une décomposition de la densité de moment cinétique propre (σ^j).

Les tenseurs (j), (m), $\{k\}$, $\{l\}$ et $\{S\}$ appartiennent en propre au système (A), et (ω^1), (σ), (ω^2), $\{K\}$, $\{L\}$ et $\{T\}$ au système (B); les grandeurs physiquement bien identifiées sont (j), $\{k\}$, (m), de nature électromagnétique, et (σ), $\{T\}$, de nature inertique. Finalement, le sous-système (A) caractérise le comportement électromagnétique et le sous-système (B) le comportement inertique du fluide de probabilité de Dirac.

En l'absence de potentiel électromagnétique extérieur $(A^i \equiv 0)$, on voit que *le système électromagnétique* (A) *et le système inertique* (B) *sont complètement indépendants*. Au contraire, *la présence d'un potentiel* A^i *produit un couplage électro-mécanique*, en introduisant dans chaque tenseur $\{\ \}$ (issu de l'opérateur antisymétrique $[\partial^i]$) un terme de nature physiquement *opposée*; c'est ainsi que se manifeste l'effet pondéromoteur du champ. On peut remarquer que cette manifestation est beaucoup plus symétrique que dans l'ancienne mécanique relativiste du point chargé, où s'introduisait seulement une impulsion-masse électromagnétique.

Remarque. — Si H^{ij} désigne le champ électromagnétique, on montre avec Tetrode que

$$\partial_k\{T^{kl}\} = \partial_k\{T^{lk}\} = 2i\varepsilon H^{kl}(j_k);$$

un calcul analogue conduit au résultat (*)

$$\partial_i\{S^{ij}\} = \partial_i\{S^{ji}\} + 2\mu_0\{l^j\} = 2i\varepsilon H^{ij}(\sigma_i).$$