MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur l'invariance de jauge des tenseurs de la théorie de Dirac. Sur l'interprétation d'une formule de Tetrode et d'une formule de M. E. Durand.*

Note (1) de M. **Olivier Costa de Beauregard**.

L'équation de Dirac et sa conséquence bien connue du second ordre

$$(\gamma_k p^k + \mu_0)\psi = 0, \qquad \left(p_k p^k - \mu_0^2 + i\varepsilon \frac{1}{2}\gamma_{kl}\mathrm{H}^{kl}\right)\psi = 0,$$

$$\left(p^k = \underset{\rightarrow}{\partial^k} - i\varepsilon \mathrm{A}^k, \qquad \mathrm{H}^{kl} = \partial^l \mathrm{A}^k - \partial^k \mathrm{A}^l; \qquad \varepsilon = \frac{2\pi}{h}\frac{e}{c}, \qquad \mu_0 = \frac{2\pi}{h} c m_0\right)$$

sont invariantes par la transformation

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{A}'^k + \partial^k \mathrm{U}, \qquad \psi = e^{i\varepsilon \mathrm{U}}\psi'$$

(invariance de jauge) cela résulte immédiatement de ce que les opérateurs p^k et $e^{i\varepsilon \mathrm{U}}$ satisfont à la relation de non-commutation $p^k e^{i\varepsilon \mathrm{U}} = e^{i\varepsilon \mathrm{U}} p'^k$.

L'équation de Dirac admet comme conséquences deux familles de 5 relations tensorielles différentielles, linéaires et homogènes en les 5 tenseurs $(\psi^\times \gamma^{\mathrm{A}} \psi)$ et en les 5 tenseurs $\{\psi^\times [\partial^k] \gamma^{\mathrm{A}} \psi - 2i\varepsilon \mathrm{A}^k (\psi^\times \gamma^{\mathrm{A}} \psi)\}$ (2).

$$\left(\psi^\times = i\psi^* \gamma^4; \qquad [\partial^k] = \underset{\rightarrow}{\partial^k} - \underset{\leftarrow}{\partial^k}; \qquad \gamma^{\mathrm{A}} = 1, \gamma^k, \gamma^{kl}, \bar{\gamma}^k = \gamma^{lij}, \ddot{\gamma} = \gamma^{ijkl}\right).$$

Les tenseurs (A) jouissent visiblement de l'invariance de jauge, et il suit de ce qui précède que les tenseurs $\{^{k\mathrm{A}}\}$, que nous avons systématiquement introduits dans la Théorie, en jouissent également. Ces derniers tenseurs apparaissent comme la différence d'un *tenseur total* et d'un *tenseur potentiel*, ces termes s'entendant au même sens que pour le quadrivecteur impulsion-énergie relativiste; le tenseur différence, *tenseur propre* du fluide électronique, est seul doué d'objectivité physique (statistique) et d'invariance de jauge.

M. E. Durand a tiré de l'équation de Dirac du second ordre deux intéressantes familles de 5 relations tensorielles, où l'on voit apparaître le

(1) Séance du 15 mai 1943.

(2) W. Franz, (*Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, 3, 1935, p. 404); *Zur Diracschen Theorie* (*Ann. der Physik*, 38, 1940, p. 565); O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 818; *Journ. Math.*, **22**, II, 1943, pp. 152-154.

champ H^{kl} (3). Dans l'une de ces familles, la divergence en ∂_k des 5 tenseurs $\{^{kA}\}$ est respectivement égalée à des expressions qui, avec nos notations et à un facteur $-2i\varepsilon$ près, s'écrivent o; $H^{ik}(j_k)$; $H^{j}_{.k}(m^{ik}) - H^{i}_{.k}(m^{jk})$; $H^{ik}(\sigma_k)$; o. Dans l'autre famille les expressions que nous écrivons

$$\left(\overrightarrow{\partial}^i_i - 2\mu_0^2\right)(^A) - 2\left[\psi^\times \overleftarrow{\partial}^i \gamma^A \overrightarrow{\partial}_i \psi + i\varepsilon A_i\{^{iA}\} - \varepsilon^2 A_i A^i(^A)\right]$$

sont respectivement égalées, au facteur $-2i\varepsilon$ près, aux expressions $(1/2)H^{kl}(m_{kl})$; $\overline{H}^{ik}(\sigma_k)$; $-H^{ij}(\omega_1) + \overline{H}^{ij}(\omega_2)$; $\overline{H}^{ik}(j_k)$; $-(1/2)\overline{H}^{kl}(m_{kl})$; prises à elles seules, les expressions $\psi^\times \overleftarrow{\partial}^i \cdot \gamma^A \overrightarrow{\partial}_i \psi$ ne jouissent pas de l'invariance de jauge, mais les tenseurs complets $[^A]$ jouissent de cette invariance.

II. Le contenu du raisonnement classique par lequel on introduit la notion de *spin* en Théorie de Dirac est strictement le suivant : le moment cinétique qui obéit à l'action du moment pondéromoteur *orbital* se décompose en le moment orbital $\vec{r} \wedge \vec{p}_{op}$ et en *un* moment propre $\vec{S}_{op}$ (4). Au point de vue densitaire, et d'après notre théorie des milieux doués de spin, cette circonstance est liée d'une manière biunivoque à l'asymétrie du tenseur inertique (5). En Théorie de Dirac, le tenseur densitaire que les principes généraux associent à l'opérateur d'impulsion $\vec{p}$ est le tenseur asymétrique T^{ij} de Tetrode (6); dans ces conditions, l'interprétation que nous avions donnée de la formule de Tetrode (7) $T^{ji} - T^{ij} = \partial_k \sigma^{ijk}$ doit être précisée de la manière suivante : *la densité de spin σ^{ijk} classique est la densité induite par l'asymétrie du tenseur* T^{ij}. Ainsi se trouve levé un paradoxe que nous avions cru apercevoir.

A l'action du moment pondéromoteur orbital s'ajoute, sur l'électron doué des moments magnétique $\vec{\mathcal{H}}$ et électrique $\vec{\mathcal{E}}$, celle du couple pondéromoteur $\vec{E} \wedge \vec{\mathcal{E}} + \vec{H} \wedge \vec{\mathcal{H}}$. Or l'une des formules de M. Durand s'écrit

$$\partial_k \tau^{ijk} = H^{j}_{.k} m^{ik} - H^{i}_{.k} m^{jk} \qquad \text{avec} \qquad \tau^{ijk} = \frac{i}{m_0}\left(\frac{h}{4\pi}\right)^2 \{^{ijk}\};$$

elle permet d'interpréter le tenseur τ^{ijk} comme *la densité de moment cinétique propre qui obéit à l'action de la densité de couple pondéromoteur classique de l'électromagnétisme des milieux polarisés.* La théorie de Dirac n'impose aucune relation tensorielle linéaire entre les densités σ^{ijk} et τ^{ijk}, qui apparaissent ainsi complètement indépendantes, et pourvues chacune de son interprétation

(3) *Comptes rendus*, 217, 1943, p. 662.
(4) L. de Broglie, l'*Électron magnétique*, pp. 201-204 (Paris, 1934).
(5) *Journ. Math.*, *op. cit.*, pp. 128-130.
(6) O. Costa de Beauregard, *op. cit.*, pp. 113-114.
(7) *Op. cit.*, p. 158.

précise ([8]). Le ferromagnétisme, dû au spin de l'électron, doit offrir une manifestation macroscopique de la densité de polarisation m^{ij} et du couple pondéromoteur de M. Durand.

([8]) Le tenseur σ^{ijk} est complètement antisymétrique, τ^{ijk} sur j, k, seulement. On peut former, à partir de τ^{ijk}, la sommation s'entendant par permutation circulaire, un tenseur complètement antisymétrique $\tau_0^{ijk} = \Sigma\tau^{ijk}$, et montrer que, dans le cas de l'onde plane monochromatique, les tenseurs σ^{ijk} et τ_0^{ijk} sont homothétiques l'un de l'autre.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 218, p. 961-963, séance du 19 juin 1944.)

Dépôt légal d'éditeur. — 1944. — N° d'ordre 25.
Dépôt légal d'imprimeur. — 1944. — N° d'ordse 42.

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
121296-44 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.