1947-4

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la symétrisation relativiste du formalisme quantique en théorie de Dirac.* Note [1] de M. **Olivier Costa de Beauregard.**

Le formalisme généralisé que nous proposons vient coïncider avec le formalisme classique lorsque : α. l'on prend la *matrice-tampon* γ^0 [2] égale à γ^4, β. l'on calcule les intégrales *à temps constant.*

Prenons *arbitrairement* une famille $\mathcal{S}(\theta)$ d'hypersurfaces curvilignes tridimensionnelles du genre espace balayant continûment tout l'Univers de Minkowski dans le sens des temps croissants lorsque θ varie de $-\infty$ à $+\infty$; $\mathcal{S}$ sera dit *pseudo-espace* et θ *pseudo-temps.*

Le fondement de notre théorie est la *définition généralisée du produit scalaire hermitien suivante* [3]

$$(1)\qquad (\varphi, \psi\,\delta u) \equiv ic \iiint_{\mathcal{S}} \varphi^+\gamma^0\gamma^i\psi\,\delta u_i;$$

les notations sont celles usuelles en théorie de Dirac, et $ic\,\delta u_i$ désigne le dual de l'élément d'intégration $[dx^j\,dx^k\,dx^l]$. Cette définition jouit des propriétés habituelles

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\varphi, a\psi\,\delta u) = a(\varphi, \psi\,\delta u), & (\varphi_1+\varphi_2, \psi\,\delta u) = (\varphi_1, \psi\,\delta u) + (\varphi_2, \psi\,\delta u), \\ (\varphi, \psi\,\delta u) = \overline{(\psi\,\delta u, \varphi)}, & (\psi, \psi\,\delta u) \begin{cases} > 0 & \text{si } \psi \neq 0, \\ = 0 & \text{si } \psi \equiv 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

(2_3) résulte du jeu spécial de la *matrice tampon* γ^0, et (2_4) de ce que le quadricourant de Dirac $i\psi^+\gamma^0\gamma^i\psi$ est du genre temps; pour la même raison, l'on peut normer à pseudo-temps constant suivant

$$(3)\qquad (\psi, \psi\,\delta u) = 1,$$

condition conservative. Les (2), jointes à l'hypothèse de la complétion [mais non nécessairement à celle de la séparabilité [4]] permettent de fonder axiomatiquement la théorie de l'espace de Hilbert et de ses opérateurs.

[1] Séance du 6 octobre 1947.

[2] Nous nous référons implicitement, dans toute cette Note, aux résultats, définitions et notations de notre Thèse, principalement à ceux du chap. I, paragraphe 2 (*Journal de Math.*, XXII, 2, 1943, p. 85).

[3] Nous avons dû légèrement expliciter le symbolisme usuel pour tenir compte de ce que les trois $ic\,\delta u^\nu$ sont imaginaires ($\nu = 1, 2, 3$).

[4] E. Arnous, *Thèse*, p. 21 (Paris, 1946).

La généralisation de la notion d'opérateurs adjoints se fait d'elle même. On s'assure que les deux quadri-opérateurs

$$X^i = x^i \times, \qquad P^i = -\frac{h}{2\pi i}\partial^i + \frac{e}{c}A^i, \tag{4}$$

ont leurs composantes 1, 2, 3 hermitiennes et 4 antihermitienne; pour P^i, la propriété résulte du calcul

$$\iiint \{\psi^+\gamma^0\gamma^i\partial_j\psi + \partial_j\psi^+\gamma^0\gamma^i\psi\}\,\delta u_i = \iiint_{\mathcal{S}} \partial_j(\psi^+\gamma^0\gamma^i\psi)\,\delta u_i = \iint_{\mathcal{S}} \psi^+\gamma^0\gamma^i\psi\,\delta s_{ij} = 0\,;$$

l'intégrale double est prise sur le contour, infiniment éloigné, de $\mathcal{S}$, et l'on suppose essentiellement que ψ décroît suffisamment vite à l'infini spatial; $ic\,\delta s_{ij}$ est le dual de $[dx^k dx^l]$. Ce calcul permet d'introduire l'opérateur antisymétrisé

$$[P^i] = -\frac{h}{4\pi i}[\partial^i] + \frac{e}{c}A^i, \qquad \text{avec} \quad [\partial^i] = \underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i}, \tag{4}$$

qui, comme les précédents, jouit de la *symétrie relativiste du second principe*. Par ailleurs, grâce au jeu de la matrice γ^0, *tout se passe comme si* les 5 opérateurs-tenseurs *diraciens* $\gamma^{ij\cdots}$ jouissaient de cette même symétrie.

La généralisation s'étend à la théorie des valeurs et fonctions propres, ainsi qu'à l'énoncé des principes généraux de la statistique quantique; l'on donnera, pour le pseudo-instant θ d'une mesure future, l'expression connue de la *fonction de répartition* de J. de Neumann (5) ou celle de la *fonction caractéristique* d'E. Arnous (4). Il suit de là, comme d'habitude, que la valeur moyenne probable au pseudo-instant θ d'une grandeur d'opérateur $R^{jk\cdots}$ sera

$$\bar{r}^{jk\cdots} = (\psi,\ R^{jk\cdots}\psi\,\delta u)\,; \tag{5}$$

si n est le rang du tenseur correspondant en relativité classique, c'est-à-dire aussi le rang de $\bar{r}^{jk\cdots}$ et celui, au moins symbolique, de $R^{jk\cdots}$ (6), notons que, d'après nos principes, le rang de la densité homologue

$$\rho^{ijk\cdots} = \psi^+\gamma^0\gamma^i R^{jk\cdots}\psi \tag{6}$$

sera $n+1$, ce qui est correct au point de vue relativiste.

D'après (5) et (1), la densité associée à l'opérateur de présence 1 est bien le quadri-courant de Dirac (j^i), et celle associée au quadri-opérateur P^i ou $[P^i]$ le tenseur asymétrique de Tetrode (T^{ij}). Celle associée au quadri-opérateur X^i

---

(5) *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*, trad. A. Proca, Paris, 1946.

(6) Rappelons que les diverses *composantes* de $R^{jk\cdots}$ ne sont pas nécessairement *simultanément* mesurables.

est $x^i(j^k)$, et, pour une intégration faite à temps constant t, la valeur *moyenne* de x^4 n'est autre que ict.

Suivant qu'on applique les formules (5) et (1) aux cinq γ ou à leurs duales, l'intégration abaisse ou élève de 1 le rang du tenseur symbolique fini; on conclut de là le tableau suivant, qui symétrise celui de notre Thèse [7]

Grandeur finie (rang $n-1$).	Densité (rang n).	Grandeur finie (rang $n+1$).
–	(ω_1)	*Fausse impulsion-masse* $\omega_1\,\partial u^l$
Charge électrique $j^k\,\partial u_k$	(j^k)	*Courant électrique fini* $j^k\,\partial u^l - j^l\,\partial u^k$
Moment électrique propre $m^{ij}\,\partial u_j$	(m^{ij})	Moment magnétique propre $\Sigma\, m^{ij}\,\partial u^k$
Spin $\sigma^{ijk}\,\partial u_k$	(σ^{ijk})	*Grandeur mécanique* X $\sigma^k\,\partial u_k$
Grandeur mécanique Y^i $\omega_2^{ijkl}\,\partial u_l$	(ω_2^{ijkl})	–

Pour la grandeur quantique finie, l'opérateur est, à un coefficient physique convenable, le γ de rang $n\pm 1$; nous avons indiqué l'expression élémentaire classique de ces grandeurs.

Des considérations physiques permettent de justifier la validité de la généralisation des principes quantiques que nous proposons ici.

---

(7) *Op. cit.*, p. 117; voir aussi pp. 114-116, 132-133 et 153.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 225, pp. 626-629, séance du 13 octobre 1947.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
127482-47 Paris — Quai des Grands-Augustins 55.