MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Relation entre la densité de spin d'E. Durand* (1), (2) *et celle de Dirac. Interprétation physique de la relation* (3) *entre le tenseur inertial de Tetrode et le produit des courants de Dirac et Gordon.* Note de

M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD, présentée par M. Louis de Broglie.

---

1. Rappelons que les dix équations tensorielles de Franz (4), Kofink (5) (qui contiennent plusieurs équations antérieurement connues) s'obtiennent en ajoutant et retranchant l'équation de Dirac et son adjointe préalablement multipliées par l'une des cinq matrices-tenseurs antisymétriques γ. Ces dix équations se scindent en deux systèmes de cinq, que nous (3) nommons (A) et (B), et qui sont indépendants en l'absence de champ électromagnétique H^{ij}. Dans le système (A), à interprétation électromagnétique, le facteur physique multipliant les tenseurs abstraits est toujours proportionnel à e et, dans le système (B), toujours proportionnel à $h/2\pi$ (en outre, il peut figurer des puissances simples de c et de la fréquence propre $\varkappa = 2\pi c m_0/h$ des ondes électroniques). On peut donc dire que la relation de h au champ de gravitation est ici semblable à la relation de e au champ électromagnétique (6).

2. M. E. Durand (1) a eu l'idée heureuse de faire un calcul semblable au précédent sur l'équation de Dirac du second ordre, et de faire apparaître ainsi deux nouveaux systèmes de cinq équations tensorielles, que nous appellerons (C) et (D).

Le système (C) égale successivement les cinq divergences (respectivement multipliées par les facteurs convenables) $\partial_i \{ \overline{\psi} [\partial^i] \gamma \psi - 2 i \varepsilon A^i \overline{\psi} \gamma \psi \}$ à 0, $H^{kl} j_l$ $H^{ik} m^j{}_k - H^{jk} m^i{}_k$, $H^{kl} \sigma_l$, 0 ($[\partial^i] \equiv \underset{\rightarrow}{\partial^i} - \underset{\leftarrow}{\partial^i}$, $\varepsilon = 2\pi e/ch$; j_l, courant, m_{ij} polarisation, σ_i, densité de spin de Dirac). Sauf (C_4) qui pose un problème, l'interprétation des équations (C) est obvie.

Les cinq équations (D), qui font apparaître cinq nouveaux tenseurs ne figurant pas dans (A), (B), (C), restent ininterprétées.

3. Considérons l'équation (B_3), initialement due à Tetrode et interprétée par nous (3)

$$T^{ij} - T^{ji} = \partial_k \sigma^{kij}, \tag{1}$$

et l'équation (C_3) de Durand

$$H^{ik} m^j{}_k - H^{jk} m^i{}_k \equiv \mu^{ij} = \partial_k \overset{kij}{\underset{\vee}{\tau}}, \tag{2}$$

où par définition

$$\text{(3)} \qquad T^{ij} = \frac{ich}{4\pi}\{\bar\psi[\partial^i]\gamma^j\psi - 2i\varepsilon A^i\bar\psi\gamma^j\psi\}, \qquad \sigma^{ijk} = \frac{ich}{4\pi}\bar\psi\gamma^{ijk}\psi,$$

$$\text{(4)} \qquad m^{ij} = \frac{e}{2\varkappa}\bar\psi\gamma^{ij}\psi, \qquad \tau^{ijk} = -\frac{ich}{8\pi\varkappa}\{\bar\psi[\partial^i]\gamma^{jk}\psi - 2i\varepsilon A^i\bar\psi\gamma^{jk}\psi\}.$$

La relation entre les deux densités de spin σ^{ijk} *et* $\tau^{\overset{ijk}{\vee}}$ (qui n'a jamais été signalée) *est précisément fournie par l'équation* (B_4), *qui s'écrit*

$$\text{(5)} \qquad \sigma^{ijk} = \tau^{\overset{ijk}{\vee}} + \tau^{\overset{jki}{\vee}} + \tau^{\overset{kij}{\vee}} + \partial_l\omega^{ijkl},$$

$$\text{(6)} \qquad \omega^{ijkl} = -\frac{ich}{8\pi\varkappa}\bar\psi\gamma^{ijkl}\psi;$$

on peut dire qu'elle décompose la densité de spin de Dirac comme (aux variances près) l'équation (A_2), initialement due à Gordon, décompose le courant de Dirac.

En posant par définition

$$\text{(7)} \qquad \tau_{[2]}{}^{\overset{ijk}{\vee}} = \tau^{\overset{jki}{\vee}} - \tau^{\vee}$$

et tenant compte de (1), (2), (5), on peut écrire

$$\text{(8)} \qquad \mu^{jk} = T^{jk} - T^{kj} - \partial_i\tau_{[2]}{}^{\overset{ijk}{\vee}};$$

cette équation a la forme canonique résultant de notre théorie générale des milieux continus doués de spin [7], et se trouve ainsi interprétée.

4. L'une des nombreuses identités quadratiques [3] du type Pauli-Kofink [5] intéresse particulièrement notre sujet : celle exprimant la différence entre le tenseur inertial de Tetrode et le produit des courants de Dirac et de Gordon (respectivement multipliés par des facteurs convenables; $\bar\gamma^l = \varepsilon^{ijkl}\gamma_{ijk}$, $\bar\gamma \equiv \gamma_5 = \gamma_{1234}$)

$$\bar\psi[\partial^i]\gamma^j\psi.\bar\psi\psi - \bar\psi[\partial^i]\psi.\bar\psi\gamma^j\psi = \bar\psi\gamma^{jk}\psi\partial^i(\bar\psi\gamma_k\psi) + \bar\psi\bar\gamma^j\psi.\partial^i(\bar\psi\bar\gamma\psi).$$

Dans un cas de régime permanent, les termes en $4, j$ de cette différence s'annulent dans le repère lorentzien « propre ». Considérons alors un cas d'aimantation macroscopique due au spin de l'électron (ferromagnétisme), constant dans le temps mais tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\sigma} \neq 0$; les $T^{i4} - T^{4i}$ sont alors non nulles en vertu de l'équation (B_3) ou (1), et par conséquent, d'après ce qu'on vient de dire, les $k^i j^4 - k^4 j^i$ sont également non nulles. *Dans un cas de ferromagnétisme constant dans le temps et tel que* $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\sigma} \neq 0$, *le courant de Dirac et le courant de Gordon ne sont pas colinéaires.*

Cette remarque nous confirme dans l'impression que l'expérience d'effet inertial de spin que nous avons récemment proposée [8] pourrait bien donner un résultat positif.

(¹) E. DURAND, *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 36.

(²) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 961.

(³) O. COSTA DE BEAUREGARD, *J. Math. pures et appl.*, 22, 1943, p. 61-75; *voir* notamment équ. (51) et (61).

(⁴) *Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, 3, 1935, p. 379.

(⁵) *Ann. Physik*, 38, 1940, p. 421, 436, 565 et 583.

(⁶) La formule de Newton appliquée à deux corpuscules élémentaires en quasi-repos, s'écrit $r^2 F = c^4 G h^2 \nu_1 \nu_2$ tandis que celle de Coulomb appliquée à deux corpuscules chargés n_1 et n_2 fois s'écrit $r^2 F = K e^2 n_1 n_2$: dans le premier cas, les dénombrements se font dans le temps et, dans le second, dans l'espace.

(⁷) *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949, équ. (IV.104), p. 121.

(⁸) *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 237 et 516; 247, 1958, p. 1092.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 247, p. 1965-1967, séance du 1er décembre 1958.)

GAUTHIER-VILLARS,
ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
154661-58 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.