RELATIVITÉ. — *Extension des formules de Franz-Kofink à la théorie de Dirac-Lichnerowicz.* Note (*) de MM. **Olivier Costa de Beauregard** et **Marcel Lenoir**, présentée par M. Louis de Broglie.

On se propose d'étendre à la théorie de Dirac généralisée par M. A. Lichnerowicz les relations de Franz-Kofink et de calculer les divergences des tenseurs.

$$T_{\alpha\beta} = \overline{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma_\beta\psi, \qquad S_{\alpha\beta} = \overline{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma_5^\beta\psi. \tag{1}$$

1. *Rappel des équations de Dirac en Relativité générale d'après M. A. Lichnerowicz* [(1), (2)]. — *a.* Sur une variété espace-temps V_4 munie d'une métrique hyperbolique normale (dont la signature est +, —, —, —) et rapportée à des repères orthonormés, on définit une connexion riemannienne $c^\alpha_{\beta\rho}$ et une connexion spinorielle associée $\sigma^a_{b\rho}$:

$$\sigma^\alpha{}_{b\rho} = -\frac{1}{4} c^\alpha_{\beta\rho}\gamma_\alpha{}^a{}_r\gamma^{\beta r}{}_b. \tag{2}$$

Les indices spinoriels a, b, r prennent les valeurs 1, 2, 3, 4, les indices tensoriels α, β, ρ prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

Ces matrices γ^α vérifient les relations

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = -2\eta^{\alpha\beta}I \quad (\eta^{00} = 1;\ \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1). \tag{3}$$

Leurs dérivées absolues sont nulles. Aux connexions $c^\alpha_{\beta\rho}$ et $\sigma^a_{b\rho}$ correspondent les tenseurs de courbure $R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}$ et $P^a{}_{b,\lambda\mu}$ liés par la relation

$$P^a{}_{b,\lambda\mu} = -\frac{1}{4} R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma_\alpha{}^{ar}\gamma^\beta{}_{rb}. \tag{4}$$

De (3) et de l'identité

$$R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu} + R^\alpha{}_{\lambda,\mu\beta} + R^\alpha{}_{\mu,\beta\lambda} = 0, \tag{5}$$

on déduit que

$$R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu = 0. \tag{6}$$

L'identité de Ricci appliquée aux spineurs ψ^a et φ_a donne

$$\Delta\psi^a = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\psi^a + \frac{1}{4}R\psi^a, \qquad \Delta\varphi_a = -\nabla^\lambda\nabla_\lambda\varphi_a + \frac{1}{4}R\varphi_a. \tag{7}$$

Les équations de Dirac généralisées s'écrivent

$$\gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \varepsilon\psi = 0, \qquad \nabla_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha + \varepsilon\overline{\psi} = 0. \tag{8}$$

Il en résulte les équations de Klein-Gordon :

$$\Delta\psi - \varepsilon^2\psi = 0, \qquad \Delta\overline{\psi} + \varepsilon^2\overline{\psi} = 0. \tag{9}$$

2. *Les relations de Franz-Kofink généralisées* [(3), (4)]. — Posons

$$\gamma^{\rho\lambda\ldots\mu} = \gamma^\rho\gamma^\lambda\ldots\gamma^\mu.$$

si tous les indices $\rho, \lambda, \ldots, \mu$ sont différents, et

$$\gamma^{\rho\lambda\ldots\mu} = 0$$

si deux au moins des indices $\rho, \lambda, \ldots, \mu$ sont égaux.

Comme en théorie de Dirac, on déduit des équations (8) les deux systèmes de relations de Franz-Kofink généralisées :

$$\nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) = 0, \tag{10}$$

$$\bar{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma^\alpha\psi + 2\varepsilon\bar{\psi}\psi = 0, \tag{10'}$$

$$\bar{\psi}[\nabla^\beta]\psi + \nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^{\beta\alpha}\psi) - 2\varepsilon\bar{\psi}\gamma^\beta\psi = 0, \tag{11}$$

$$\nabla^\beta(\bar{\psi}\psi) + \bar{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma^{\beta\alpha}\psi = 0, \tag{11'}$$

$$\nabla^\lambda(\bar{\psi}\gamma^\beta\psi) - \nabla^\beta(\bar{\psi}\gamma^\lambda\psi) - \bar{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma^{\alpha\beta\lambda}\psi - 2\varepsilon\bar{\psi}\gamma^{\beta\lambda}\psi = 0, \tag{12}$$

$$-\bar{\psi}[\nabla^\beta]\gamma^\lambda\psi + \bar{\psi}[\nabla^\lambda]\gamma^\beta\psi + \nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta\lambda}\psi) = 0, \tag{12'}$$

$$\nabla^\rho(\bar{\psi}\gamma^*_{\rho\nu}\psi) + \bar{\psi}[\nabla_\nu]\gamma^*\psi = 0, \tag{13}$$

$$\bar{\psi}[\nabla^\rho]\gamma^*_{\rho\nu}\psi + \nabla_\nu(\bar{\psi}\gamma^*\psi) - 2\varepsilon\bar{\psi}\gamma^*_\nu\psi = 0, \tag{13'}$$

$$\bar{\psi}[\nabla_\rho]\gamma^{*\rho}\psi = 0, \tag{14}$$

$$\nabla_\rho(\bar{\psi}\gamma^{*\rho}\psi) - 2\varepsilon\bar{\psi}\gamma^*\psi = 0. \tag{14'}$$

On a posé

$$\gamma^{\beta\lambda} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\lambda\rho\mu}\gamma^*_{\rho\mu}, \qquad \gamma^{\beta\lambda\rho} = -\varepsilon^{\beta\lambda\rho\nu}\gamma^*_\nu, \qquad \gamma^{\alpha\beta\lambda\rho} = -\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}\gamma^* \tag{15}$$

et l'on convient de désigner par $\nabla_{\underset{\leftarrow}{\alpha}}$ et $\nabla_{\underset{\rightarrow}{\alpha}}$ les opérateurs de dérivation covariante qui opèrent respectivement à gauche et à droite et par $[\nabla_\alpha]$ l'opérateur

$$[\nabla_\alpha] = \nabla_{\underset{\leftarrow}{\alpha}} - \nabla_{\underset{\rightarrow}{\alpha}}.$$

Les relations de Franz-Kofink qui portent un numéro non accentué possèdent une interprétation électrodynamique, les autres ont une interprétation dynamique.

3. *Divergence des tenseurs* $T_{\alpha\beta}$ *et* $S_{\alpha\beta}$. — *a*. En utilisant les identités (7) et les équations (9), on obtient d'après la définition (1) des tenseurs $T_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}$:

$$\nabla_\beta T^\beta{}_\alpha = 0, \tag{16}$$

$$\nabla_\beta S^\beta{}_\alpha = 0. \tag{17}$$

b. Les équations (12) et (12′) peuvent s'écrire

$$T^{\lambda\beta} - T^{\beta\lambda} = \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^*_\mu\psi), \tag{18}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\bar{\psi}[\nabla_\alpha]\gamma^*_\mu\psi = \nabla^\lambda(\bar{\psi}\gamma^\beta\psi) - \nabla^\beta(\bar{\psi}\gamma^\lambda\psi) - 2\varepsilon\bar{\psi}\gamma^{\beta\lambda}\psi. \tag{19}$$

Des relations (16) et (18) et de l'identité de Ricci, on déduit que

$$\nabla_\beta T^{\lambda\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\nabla_\beta\nabla_\alpha(\bar{\psi}\gamma^*_\mu\psi) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\bar{\psi}\gamma^*_\tau\psi R^\tau{}_{\mu,\beta\alpha}. \tag{20}$$

Il résulte alors de l'identité (5) que

$$\nabla_\beta T^{\lambda\beta} = 0. \tag{21}$$

c. Les équations (17) et (19) et l'identité de Ricci donnent

$$\nabla_\beta S^{\lambda\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} R_{\tau\alpha,\beta\rho}\bar{\psi}\gamma^\tau\psi - 2\varepsilon\nabla^\beta(\bar{\psi}\gamma^*_{\rho\beta}\psi)\eta^{\rho\lambda}. \tag{22}$$

De l'identité (5) et de la relation (13) il résulte alors que

$$\nabla_\beta S^{\lambda\beta} = 2\varepsilon\bar{\psi}[\nabla^\lambda]\gamma^*\psi. \tag{23}$$

d. Un calcul direct permet de montrer que $\nabla_\beta T^{\lambda\beta}$ est nul.

Les équations de Dirac et les identités de Ricci donnent

$$\nabla_\beta T^{\lambda\beta} = P^r{}_{a,\beta}{}^\lambda\bar{\psi}_r\gamma^{\beta a}{}_b\psi^b - \bar{\psi}_a\gamma^{\beta a}{}_b P^b{}_{r,\beta}{}^\lambda\psi^r$$

et, d'après (4) et (5), cette relation peut s'écrire

$$\nabla_\beta T^{\lambda\beta} = -\frac{1}{4}R^\lambda{}_{\alpha,\rho\beta}\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi. \tag{24}$$

La relation (6) montre alors que le second membre de (24) est nul.

Pour toute solution (ψ, γ^α) des équations de Dirac (3) et (8), la divergence du tenseur symétrisé de Tétrode est donc nulle. Si l'on fait jouer à ce tenseur le rôle du tenseur d'impulsion-énergie dans le second membre des équations d'Einstein, les équations du mouvement ne peuvent plus être obtenues par la méthode du tenseur d'énergie puisque les équations de conservation résultent uniquement des équations de Dirac.

(*) Séance du 16 juillet 1962.

(1) A. Lichnerowicz, *Comptes rendus*, 252, 1961, p. 3742.

(2) R. Potier, *Comptes rendus*, 243, 1956, p. 939.

(3) W. Kofink, *Ann. Physik*, 30, 1937, p. 91-98.

(4) O. Costa de Beauregard, *J. Math. pures et appl.*, 22, 1943, p. 151.

(*Théories physiques, Institut Henri Poincaré, Paris,* 5e.)