C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261 p. 5483-5486 (24 mai 1965). **Groupe 4.**

RELATIVITÉ. — *Dynamique des systèmes de points en interaction.* Note de M. **Olivier Costa de Beauregard**, présentée par M. Louis de Broglie.

Synthèse des théories de Wheeler-Feynman ([1]) et de Van Dam-Wigner ([2]).

Van Dam et Wigner ([2]) postulent que l'*interaction* ne transmet pas de signaux et établit des liaisons du genre espace; par là ils supposent implicitement que c'est le *rayonnement* qui peut transmettre des signaux et qui établit des liaisons du genre temps. Chez Wheeler et Feynman ([1]), le rayonnement et l'interaction établissaient des liaisons isotropes.

Nous allons montrer ici qu'une très légère modification des postulats et des notations de Van Dam et Wigner permet d'étendre à leur théorie toutes les formules essentielles de celle de Wheeler et Feynman; de la sorte, la théorie de Wheeler et Feynman apparaîtra comme un cas particulier de celle de Van Dam et Wigner, obtenue en égalant la fonction arbitraire du carré de la distance spatio-temporelle $\varphi(r^2)$ (identiquement nulle pour r du genre temps) à $\delta(r^2)/2\pi$.

Soient donc $a^i, b^i, \ldots (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4;\ x^4 = ict)$ les coordonnées des n points interagissants, $\alpha, \beta, \ldots$ leurs temps propres $(\dot{a}^i \equiv da^i/d\alpha)$, $m_a, m_b, \ldots$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ leurs masses propres et leurs charges scalaires relativement au champ d'interaction; posons encore

$$(1) \qquad r^i_{ab} \equiv -r^i_{ba} = a^i - b^i, \qquad r^2 \equiv r_i r^i;$$

postulons essentiellement que les trois projections spatiales des r^i sont finies lorsque les $a^4, b^4, \ldots$ sont finis, et assujettissons la fonction d'interaction φ à la condition

$$(2) \qquad \varphi(r^2_{ab}) \equiv 0 \quad si \quad r^2_{ab} < 0.$$

Van Dam et Wigner postulent une loi du mouvement

$$(3) \qquad dp^i_a \equiv m_a\, d\dot{a}^i = \sum_{b \neq a} \mathcal{A}\mathcal{B} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \varphi'(r^2_{ab})\,(r^i_{ab}\, db^j - r^j_{ab}\, db^i)\, da_j,$$

où φ' désigne la dérivée de φ relativement à l'argument r^2; elle est de la forme canonique ([3])

$$(4) \qquad dp^i_a = F^{ij}\, da_j$$

qui assure la conservation de la masse propre m_a.

Compte tenu de ce que, d'après (1) et (2),

$$(5) \qquad \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \varphi'(r^2_{ab})\, r^j_{ab}\, db_j \equiv -\frac{1}{2} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \varphi'(r^2)\, dr^2 = 0,$$

(3) se récrit, avec Wheeler et Feynman,

$$(6)\qquad dp^i_a = \sum_{b \neq a} \mathcal{A}\mathcal{B} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \varphi'(r^2_{ab}) \{ (r^i_{ab}\, db^j - r^j_{ab}\, db^i)\, da_j - r^j_{ab}\, db_j\, da^i \},$$

et l'on voit ainsi que

$$(7)\qquad \partial_\alpha \partial_\beta (p^i_a + p^i_b) = 0;$$

comme les forces mutuelles de deux éléments de fil conducteur dans la loi de Biot-Savart-Laplace, les impulsions-énergies mutuelles de deux éléments de trajectoires a et b forment un couple.

En appliquant l'opérateur

$$(8)\qquad [\ ] \equiv \int_\alpha^{+\infty} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} \int_\beta^{+\infty}$$

de Wheeler-Feynman à l'intégrand de (6) on définit l'impulsion-énergie d'interaction

$$(9)\qquad p^i_{ab} = [\ ]\, \mathcal{A}\mathcal{B}\, \varphi'_{ab} \left\{ \begin{matrix} i \\ ab \end{matrix} \right\},$$

qui est telle que

$$(10)\qquad \partial_\alpha p^i_{ab} = - d_\alpha p^i_a, \qquad \partial_\beta p^i_{ab} = d_\beta p^i_b;$$

on a donc la loi de conservation de l'impulsion-énergie totale

$$(11)\qquad \sum_a p^i_a + \sum_a \sum_b p^i_{ab} = \mathrm{P}^i_0;$$

l'information qui manque, en cet état de la théorie, pour définir le barycentre est la ligne support du vecteur p^i_{ab}.

Définissons le quadripotentiel créé par la charge $\mathcal{B}$

$$(12)\qquad \mathrm{A}^i_{(b)} = \frac{1}{2} \mathcal{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r^2_{xb})\, db^i;$$

du fait que $(\partial/\partial x^i)\, r^2 = -(\partial/\partial b^i)\, r^2$, il satisfait à la condition de Lorentz

$$(13)\qquad \partial_i \mathrm{A}^i_{(b)} = 0,$$

mais n'est évidemment pas solution d'une équation du type Klein-Gordon.

Définissons l'impulsion-énergie potentielle créée en a_i par toutes les autres charges

$$(14)\qquad p^{*i}_a = -\frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \mathcal{A}\mathcal{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r^2_{ab})\, db^i$$

et l'impulsion-énergie composée de a^i

$$(15)\qquad \mathrm{P}^i_a \equiv p^i_a + p^{*i}_a;$$

de (13) et (14) on déduit

$$dP^l_a = \sum_{b \neq a} \mathcal{A}\mathcal{B} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \varphi'(r^2_{ab})\, r^l_{ab}\, db^j\, da_j \tag{16}$$

et l'on voit comme précédemment que

$$\partial_\alpha \partial_\beta (P^l_a + P^l_b) = 0; \tag{17}$$

le commentaire est semblable à celui de (7), mais les deux vecteurs ne sont plus tangents aux trajectoires ni de longueurs constantes. On définira aussi l'impulsion-énergie d'interaction composée

$$P^l_{ab} = [\;]\, \mathcal{A}\mathcal{B} \varphi'_{ab} r^l_{ab}\, da_j\, db^j \tag{18}$$

et l'on déduira la loi de conservation de l'impulsion-énergie totale sous la forme analogue à (11)

$$\sum_a P^l_a + \sum_{a \neq b} P^l_{ab} = P^l_0. \tag{19}$$

De (14) et (16) on déduit

$$dP^l_a - \partial^l p^{*j}_a\, da_j = 0, \tag{20}$$

où, puisque

$$\partial^l p^j_a\, da_j \equiv 0 \tag{21}$$

si l'on varie la trajectoire a en maintenant m_a constant,

$$(\partial^j P^l_a - \partial^l P^j_a)\, da_j = 0. \tag{22}$$

Introduisons l'action totale de Fokker [4]

$$\mathcal{A} = \sum_a \int_{-\infty}^{+\infty} p^l_a\, da_l + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \mathcal{A}\mathcal{B} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(r^2_{ab})\, da_l\, db^l \tag{23}$$

et postulons qu'elle est stationnaire lorsqu'on varie arbitrairement une trajectoire, soit a, entre deux instants-points 1 et 2 fixes :

$$\delta_a \mathcal{A} = \delta \int_1^2 (p^l_a + p^{*l}_a)\, da_l = \delta \int_1^2 P^l_a\, da_l = 0; \tag{24}$$

on sait, et l'on montre aisément, que (24) équivaut à

$$\delta P^l_a\, da_l - dP^j_a\, \delta a_j = 0 \tag{25}$$

ou encore à

$$(\partial^j P^l_a - \partial^l P^j_a)\, da_l\, \delta a_j = 0; \tag{26}$$

les δa_i étant arbitraires, (24) ou (25) équivaut aux équations du mouvement (22).

Rappelons que, dans le cas particulier où $2\pi\varphi(r^2) = \delta(r^2)$, la formule (12) équivaut à celle de Liénard et Wiechert utilisant la demi-somme des potentiels retardé et avancé [4].

Remarque. — Il est possible de remplacer l'hypothèse (2) de Van Dam et Vigner par une hypothèse beaucoup moins sévère et compatible avec une interaction du genre temps :

$$\varphi(-\infty) = 0. \tag{2'}$$

De la sorte (5) et (13) restent vraies. Bien entendu, le caractère fini de toutes les intégrales curvilignes utilisées doit être postulé.

(1) J. A. Wheeler et R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.*, 21, 1949, p. 425.
(2) H. Van Dam et E. P. Wigner, preprint (article dactylographié).
(3) O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 221, 1945, p. 743.
(4) A. D. Fokker, *Z. Physik*, 58, 1929, p. 386; *Physica*, 9, 1929, p. 33 et 12, 1932, p. 145.

(Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris.)

169323. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.