C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 1047-1049 (7 novembre 1966). Série B

ÉLECTROMAGNÉTISME THÉORIQUE. — *Un analogue classique des effets quantiques d'Aharonov-Bohm* [1] *et de Mercereau* [2]. Note [*] de M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD, présentée par M. Louis de Broglie.

1. Nous avons montré [3] qu'un feuillet magnétique de contour l fixe et de « puissance » i variable plongé dans un champ électrique **E** indépendant du temps t dérivant du potentiel $V(r)$ subit une force

$$\mathbf{F} = c^{-2}\frac{di}{dt}\oint V\,\delta\mathbf{l}, \tag{1}$$

qui est précisément opposée à la somme de celles appliquées aux sources Q du champ **E** par le champ électrique induit lors de la variation di/dt. Dans ce qui suit nous admettrons l'équivalence physique entre un feuillet magnétique et un courant fermé.

La formule (1) est invariante de jauge, comme celles d'Aharonov-Bohm [1] et de Mercereau [2], qui sont en $\mathbf{A}\,d\mathbf{l}$. Mais, comme il est possible en principe de calculer et de mesurer la force exercée sur un segment de circuit ouvert, nous allons ici discuter deux expériences de pensée s'appliquant à un tel cas. Cette discussion conduira à valider la formule

$$\delta\mathbf{F} = c^{-2}\frac{di}{dt}V\,\delta\mathbf{l} \tag{2}$$

comme représentant la variation d'impulsion potentielle d'un élément de circuit et ceci dans des régions où le champ **grad** V est identiquement nul. Toutefois la formule (2) restera invariante de jauge en ce sens restreint que le V étant engendré par des charges Q des deux signes suivant la formule classique

$$V_Q = r^{-1}Q + k_Q, \tag{3}$$

on devra avoir

$$\sum k_Q = 0 \quad si \quad \sum Q = 0. \tag{4}$$

2. COURANT RECTILIGNE INDÉFINI ET CHARGE ÉLECTRIQUE UNIFORME SUR UN CYLINDRE COAXIAL AU COURANT. — Soit (u. é. s. C. G. S.) z l'axe de révolution commun à un fil indéfini parcouru par un courant i et à un cylindre de rayon a portant une charge uniforme q par unité de longueur z;

soient r, θ, z les coordonnées cylindriques adaptées. $\mathbf{A}(0, 0, 2c^{-1} i \operatorname{Log} r)$ désignant le potentiel vecteur créé par le courant, une variation di de i induit un champ électrique $(0, 0, -c^{-1} \partial\mathbf{A}/\partial t)$, et applique à chaque unité de longueur du cylindre chargé une impulsion $(0, 0, -2c^{-2} \operatorname{Log} a\, q\, di)$. S'il y a deux cylindres coaxiaux de rayons a et b, $b > a$, portant respectivement les charges $+q$ et $-q$ par unité de longueur z, l'impulsion communiquée à chaque unité de longueur de ce condensateur vaut donc

$$-dp = -2c^{-2} \operatorname{Log}\left(\frac{b}{a}\right) q\, di. \tag{5}$$

Montrons qu'une impulsion opposée apparaît dans le champ. Le champ électrique du condensateur est $(2q/r, 0, 0)$, $a \leqq r \leqq b$, et le champ magnétique du fil $(0, 2c^{-1} i/r, 0)$; la variation d'impulsion exprimée en termes de champ vaut donc, par unité de longueur z,

$$dp = 2c^{-1} \int_a^b |\mathrm{E} \wedge d\mathrm{H}|\, r\, \partial r = 2c^{-2} \operatorname{Log}\left(\frac{b}{a}\right) q\, di, \tag{6}$$

soit exactement l'opposé de (5).

Mais il est classique en électromagnétisme que les impulsions-énergies s'interprètent équivalemment en termes des champs ou en termes des sources des champs. Nous en concluons que (6) représente aussi l'impulsion potentielle de chaque unité de longueur du fil axial; et comme $2q \operatorname{Log}(b/a)$ *sans constante additive* n'est autre que le potentiel V constant existant à l'intérieur du cylindre chargé de rayon a, cette formule équivaut à (2) comme on l'avait annoncé. Comme Aharonov-Bohm et Mercereau l'avaient trouvé pour le potentiel vecteur, nous trouvons que le potentiel scalaire peut jouer un rôle physique dans une région où le champ qui en dérive est identiquement nul.

3. Deux courants rectilignes antiparallèles entourés de gaines cylindriques portant des charges uniformes opposées. — Soient $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$, $d \equiv |\mathbf{I} - \mathbf{J}|$, les traces sur un plan $z =$ Cte de deux courants rectilignes parallèles à z d'intensités respectives $+i$ et $-i$. Chacun de ces courants sera entouré d'un cylindre chargé d'axe parallèle à z et de rayon $a < d/2$, portant respectivement la charge $+q$ et $-q$ par unité de longueur. Les traces de ces cylindres sur le plan $z =$ Cte seront des cercles du faisceau admettant $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ comme cercles-points. A l'extérieur des cylindres, le cercle général de ce faisceau est à la fois ligne de champ magnétique et de potentiel électrique, tandis que le cercle général du faisceau orthogonal passant par $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ est à la fois ligne de champ électrique et de potentiel magnétique. En coordonnées bipolaires r_1, r_2 et θ_1, θ_2, l'expression $2\partial(\theta_2 - \theta_1)\,\partial \operatorname{Log}(r_2/r_1)$ n'est autre que la valeur de $4\pi c^{-2}\, \mathrm{E}\, d\mathrm{H}\, \partial x\, \partial y$; on a donc

$$dp \equiv 2c^{-2} q\, d\mathrm{A}_a \equiv 2c^{-2} \mathrm{V}_a\, di = 2c^{-2} \operatorname{Log}\frac{d-a}{a} q\, di, \tag{7}$$

expression qui, lors de la variation des deux courants opposés $\pm i$, représente à la fois l'impulsion acquise par unité de longueur du condensateur (changée de signe), ou de l'ensemble des deux fils, ou, symboliquement, du champ.

Supposons maintenant que le dispositif précédent n'existe qu'entre deux plans $z = z_1$ et $z = z_2$, $|z_2 - z_1| \equiv l \gg d$, et fermons le courant à l'extérieur des plans $z = z_1$ et $z = z_2$. Une variation di du courant dans le cadre entraîne l'application à celui-ci d'une force, réelle cette fois, proportionnelle à V et à l.

4. Conclusions. — Dans cette Note et dans les deux précédentes nous avons commencé à explorer une nouvelle classe de phénomènes électromagnétiques liés à la réaction subie par un dipôle magnétique (ou un courant élémentaire d'Ampère) lorsqu'il varie dans un champ électrique extérieur indépendant du temps. Exprimés en unités cohérentes, ces effets sont en c^{-2}, donc extrêmement petits.

Parmi ces nouveaux effets figurent ceux ici discutés, qui prouvent que le potentiel scalaire V peut jouer un rôle physique dans une région où le champ $\mathbf{E}$ qui en dérive est identiquement nul; Aharonov et Bohm [1], puis Mercereau [2], ont fait une démonstration analogue touchant le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et le champ $\mathbf{H}$ qui en dérive.

Contrairement à l'intégrale en $\mathbf{A}\,\partial l$ d'Aharonov-Bohm et de Mercereau qui, devant être prise sur un contour fermé, implique une invariance de jauge complète, notre intégrale en $V\,\partial l$ garde un sens opérationnel le long d'un contour ouvert; sans être abolie, l'invariance de jauge de nos formules est de ce fait plus restreinte que chez Aharonov-Bohm et Mercereau.

En termes de sources ponctuelles du champ [équ. (3)] on a vu que l'invariance de jauge restreinte de nos formules a l'expression (4). De ce fait, ces formules sont compatibles avec l'hypothèse broglienne d'une masse propre non nulle (mais très petite) du photon, car (3) avec $k_0 = 0$ est la forme limite pour $m \to 0$ du potentiel de Yukawa $e^{-mr} r^{-1} Q$.

(*) Séance du 2 novembre 1966.

(1) Y. Aharonov et D. Bohm, *Phys. Rev.*, 115, 1959, p. 485; *voir* aussi W. Ehrenberg et R. E. Siday, *Proc. Phys. Soc.*, B, 62, 1949, p. 21 et, pour la vérification expérimentale, R. G. Chambers, *Phys. Rev. Letters*, 5, 1960, p. 3.

(2) R. C. Jaklevic, J. J. Lambe, A. M. Silver et J. E. Mercereau, *Phys. Rev. Letters*, 12, 1964, p. 274.

(3) O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 262, série B, 1966, p. 1007; *voir* aussi *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 4637.

(*Institut Henri Poincaré*,
11, *rue Pierre-Curie*, *Paris*, 5e)