

ÉLECTROMAGNÉTISME THÉORIQUE. — *L'interaction entre une charge ponctuelle et un aimant fermé de révolution en mouvement relatif uniforme comme preuve d'un rôle physique du potentiel vecteur.* Note (*) de M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD, présentée par M. Louis de Broglie.

L'interaction entre une charge ponctuelle Q portée par un point matériel Q et un aimant ou un solénoïde fermé de révolution $\mathcal{A}$, d'aimantation rigide, en mouvement relatif uniforme, présente à première vue un paradoxe. D'une part, en effet, les champs électrique et magnétique créés en tout point extérieur par l'aimant ou le solénoïde $\mathcal{A}$ étant identiquement nuls dans tout repère lorentzien, le point matériel Q ne subit aucune accélération du fait de son passage au voisinage de $\mathcal{A}$. Mais, d'autre part, si la vitesse $\mathbf{v} \equiv c\boldsymbol{\beta}$ du point Q dans le repère lorentzien $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{A}$ n'est pas nulle, la charge Q est accompagnée dans son mouvement rectiligne uniforme par un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{H} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}$ tous deux inhomogènes; de ce fait, l'aimant ou le solénoïde $\mathcal{A}$ subit à chaque instant t de $\mathcal{L}_\alpha$ une force non nulle; si donc nous voulons (ce qui est essentiel à notre raisonnement) qu'il reste au repos dans $\mathcal{L}_\alpha$, nous devons le supposer lié à une masse arbitrairement grande. *Il y a donc violation du principe ordinaire de l'action et de la réaction, puisque l'aimant ou le solénoïde $\mathcal{A}$ subit une force et que la charge Q qui la cause n'en subit pas; mais nous allons montrer qu'il y a conservation de l'impulsion si l'on tient compte de l'impulsion électromagnétique potentielle de la charge Q .* Remarquons auparavant que le paradoxe subsiste si l'on raisonne dans le repère lorentzien $\mathcal{L}_Q$ de Q : dans $\mathcal{L}_Q$ aucun champ électrique ne règne en Q , de sorte que la charge Q ne subit aucune force; mais l'aimant ou le solénoïde en mouvement à la vitesse $-\mathbf{v}$ dans le champ électrique inhomogène créé par Q subit une force, car il y apparaît une densité de charge électrique $-c^{-1}\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$ et, soit une polarisation électrique $c^{-2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{M}$ (cas de l'aimant), soit un champ électrique intérieur $c^{-2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (cas du solénoïde); on a noté $\mathbf{j}$ la densité de courant et $\mathbf{M} \equiv \mathbf{B}$ ou $\mathbf{B}$ l'induction magnétique propre à l'aimant ou au solénoïde.

Je dis maintenant que, dans le repère $\mathcal{L}_\alpha$, la force totale appliquée à l'aimant ou au solénoïde $\mathcal{A}$ lors du passage de la charge Q vaut à chaque instant, l'intégrale étant étendue au volume torique,

$$(1) \quad \mathbf{F} = c^{-2} \iiint \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \wedge \mathbf{B} \, dv;$$

$\mathbf{E}$ désigne le champ électrique accompagnant la charge Q et $\mathbf{B}$ l'induction magnétique propre à l'aimant ou au solénoïde. Le calcul est formellement

identique à celui ⁽¹⁾ qui, partant des équations de Maxwell écrites sous forme relativiste ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$) :

$$(2) \quad \sum \partial^i B^{jk} = 0, \quad \partial_l H^{kl} = j^k, \quad B^{ij} = H^{ij} + M^{ij},$$

conduit à la formule de la densité de force de Minkowski ⁽²⁾ :

$$(3) \quad f^i \equiv B^{ik} j_k + \frac{1}{4} [B_{kl} \partial^i H^{kl} - H^{kl} \partial^i B_{kl}] = \partial_j \mathcal{N}^{ij},$$

avec, par définition du tenseur élastique asymétrique de Minkowski,

$$(4) \quad \mathcal{N}^{ij} \equiv -B^{ik} H^j_k + \frac{1}{4} B^{kl} H_{kl} \delta^{ij};$$

ce calcul de Minkowski montre qu'à la densité de force bien connue de Lorentz s'ajoute celle due aux inhomogénéités des champs. Une analyse détaillée de la formule (3) montre ⁽³⁾ que la variation instantanée de l'impulsion totale contenue dans un volume $\mathcal{V}$ fixe dans un certain repère $\mathcal{L}$ vaut

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^{-2} \iiint \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}] \delta v.$$

Ici, nous voulons extraire de l'expression totale de f^i celle qui correspond à la force extérieurement appliquée à l'aimant ou au solénoïde $\mathcal{A}$ par la charge en mouvement Q . Il nous suffit pour cela de considérer que, dans les formules (2) à (4), B^{ij} représente le champ créé par la charge mobile et H^{ij} celui créé en son intérieur par l'aimant ou le solénoïde $\mathcal{A}$; on aboutit encore à la formule (5) où, cette fois, $\mathbf{D}$ désigne l'induction électrique créée par Q et $\mathbf{B}$ l'induction magnétique propre à $\mathcal{A}$; puisque dans notre cas, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ et $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, (5) entraîne la formule (1) annoncée; rappelons que dans $\mathbf{F}$ figurent non seulement les forces de Laplace, mais également celles créées à l'intérieur de $\mathcal{A}$ par les inhomogénéités des champs $\mathbf{H} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

Je dis maintenant qu'à défaut de force la charge Q subit une variation d'impulsion potentielle précisément opposée à $\mathbf{F}$. Ne recherchant pas ici la covariance relativiste des concepts et des formules, nous ferons cette démonstration dans le cas $v \ll c$ ($v \neq 0$). A cette approximation, à chaque instant t de $\mathcal{L}_a$:

$$(6) \quad \mathbf{E} = Q r^{-3} \mathbf{r},$$

en sorte que (1) se récrit

$$(7) \quad \mathbf{F} = c^{-2} Q \iiint \frac{\partial}{\partial t} (r^{-3} \mathbf{r}) \wedge \mathbf{B} \delta v.$$

Mais

$$(8) \quad \mathbf{A} \equiv c^{-1} \iiint r^{-3} \mathbf{r} \wedge \mathbf{B} \delta v$$

n'est autre que le potentiel vecteur créé à l'extérieur par l'aimant ou le solénoïde considéré comme une distribution volumique de dipôles. *A condition de prendre la formule (8) sans gradient additif arbitraire*, nous arrivons donc à l'importante formule

$$(9) \quad \mathbf{F} = c^{-1} Q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

et à l'énoncé : *la force appliquée à l'aimant ou au solénoïde fermé de révolution $\mathcal{A}$ par une charge Q en mouvement rectiligne uniforme est précisément opposée à la variation instantanée de l'impulsion-énergie électromagnétique potentielle $c^{-1} Q \mathbf{A}$ de cette charge au sein du potentiel vecteur $\mathbf{A}$. En intégrant de $-\infty$ à t , on obtient la formule*

$$(10) \quad \mathbf{p} = c^{-1} Q \mathbf{A} = c^{-2} Q \iiint r^{-3} \mathbf{r} \wedge \mathbf{B} \, d\tau,$$

où $\mathbf{p}$ désigne l'impulsion réelle reçue par l'aimant ou le solénoïde et $-\mathbf{p}$ l'impulsion potentielle reçue par la charge Q .

CONCLUSIONS. — L'expérience de pensée ci-dessus, qui implique l'interaction d'un champ magnétique induit et d'un potentiel vecteur irrotationnel, est en somme la symétrique de celle précédemment considérée ⁽⁵⁾ qui impliquait l'interaction d'un champ électrique induit et d'un potentiel scalaire sans gradient. *Dans l'une et l'autre de ces situations de potentiel sans champ nous avons montré que :*

1° *La notion d'impulsion potentielle s'impose comme une nécessité, faute de laquelle le principe de conservation de l'impulsion serait violé.*

2° *La valeur de cette impulsion potentielle [$c^{-1} Q \mathbf{A}$ dans le cas présent, iV dans le cas précédent ⁽⁵⁾] est fixée univoquement; en corollaire :*

3° *La jauge du potentiel [vecteur dans le cas présent, scalaire dans le cas précédent ⁽⁵⁾] se trouve ainsi fixée (par l'intermédiaire du principe de conservation de l'impulsion).*

4° *Cette jauge est précisément celle qui, dans le cas d'une charge ponctuelle en mouvement, s'exprime par les formules de Liénard et Wiechert sans termes additifs [comme le montre la formule (8); c'est la présence commune du terme $r^{-3} \mathbf{r}$ dans les lois (8) du potentiel du dipôle et (6) du champ de la charge qui entraîne cette conséquence]. Nous avons déjà fait remarquer [⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾] qu'il y a là un argument de poids en faveur d'une masse propre non nulle du photon.*

(*) Séance du 7 novembre 1966.

⁽¹⁾ Voir par exemple O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la Relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949, p. 82 ou C. MÖLLER, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1957, p. 202-206.

⁽²⁾ H. MINKOWSKI, *Math. Ann.*, 68, 1910, formule (91), p. 511.

⁽³⁾ O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 4637.

⁽⁴⁾ O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 263, série B, 1966, p. 1007.

⁽⁵⁾ O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 263, série B, 1966, p. 1047.