C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 353-355 (30 janvier 1967). Série B

ÉLECTROMAGNÉTISME THÉORIQUE. — *Autre forme de notre récent argument* [1] *concluant à la réalité physique du potentiel vecteur.* Note (*) de M. Olivier Costa de Beauregard, présentée par M. Louis de Broglie.

Il est bien connu qu'un aimant toroïdal maintenu fixe et doué d'une aimantation **M** parfaitement rigide (purement tangentielle : o, M_θ, o) n'oppose aucune force contre-électromotrice à une impulsion de courant en propagation suivant son arc $z'z$. Celà résulte de ce que le champ électromagnétique créé en son extérieur pour un tel aimant est identiquement nul, et celà est vérifié expérimentalement avec une très haute sensibilité.

Le problème soulevé consiste en ce que cet aimant subit une force de Stern-Gerlach **F** parallèle à z (o, o, F_z); en effet, le champ magnétique $\mathbf{H}(o, H_\theta, o)$ qui accompagne l'onde-signal présente une inhomogénéité $\partial \mathbf{H}/\partial z$ aux fronts avant et arrière de cette onde, d'où, l'intégrale étant étendue au volume de l'aimant, la force

$$F_z = \iiint \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}\,dv; \tag{1}$$

dans le cas d'un solénoïde parcouru par un courant d'intensité totale $I = ni$, et Φ désignant le flux de H à travers un demi-méridien, une expression équivalente serait

$$F_z = I\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{2}$$

Si l'on exprime **F** en fonction du champ électrique $\mathbf{E}(ct - z, \rho)$, soit (E_ρ, o, o) avec $E_\rho = -H_\theta$, qui accompagne l'onde signal, (1) se récrit

$$\mathbf{F} = c^{-1}\iiint \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\wedge \mathbf{M}\,dv; \tag{3}$$

au temps t du laboratoire, l'aimant a donc transmis à son support une impulsion

$$\mathbf{p}(t) = c^{-1}\iiint \mathbf{E}(t)\wedge \mathbf{M}\,dv; \qquad \mathbf{p}(-\infty) = \mathbf{p}(+\infty) = o. \tag{4}$$

Le problème est : *où et sous quelle forme apparaît l'impulsion de réaction* ?

La caractère crucial de ce problème apparaît si, dans une autre hypothèse, l'impulsion de courant retourne l'aimantation $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{M} = -2\mathbf{M})$, ceci, pratiquement, lors du passage du sommet du signal. L'aimant subit alors une percussion [2]

$$\Delta\mathbf{p} = c^{-1}\iiint \mathbf{E}(t_m)\wedge \Delta\mathbf{M}\,dv \tag{5}$$

et l'on s'assure aisément [2] que, cette fois, l'impulsion de recul est appliquée au courant de commande; elle se manifeste sous la forme d'une force contre-électromotrice bien connue et mesurable. Comme, en vertu de (4) et (5),

$$\Delta\mathbf{p} = -2\,\mathbf{p}(t_m - 0) = +2\,\mathbf{p}(t_m + 0), \tag{6}$$

l'impulsion « cachée » $\mathbf{p}(t_m \pm 0)$ est seulement moitié de l'impulsion « patente » $\Delta\mathbf{p}$; l'explication de sa nature physique n'est donc pas un petit, mais un gros problème.

Comme nous l'avons expliqué [1] dans un contexte légèrement différent, la seule solution possible consiste à remarquer que *l'impulsion manquante est précisément égale à l'impulsion potentielle que possède, dans le potentiel-vecteur irrotationnel de l'aimant, la charge accompagnant le signal en propagation*, et dont la densité linéaire q est liée à l'intensité i du courant suivant

$$q(ct - z) = i(ct - z). \tag{7}$$

En effet, supposant pour simplifier que la montée et la descente du signal sont lentes, et notant $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ la séparation entre un point $\mathbf{Q}$ dans l'aimant et un point $\mathbf{P}$ sur le fil, et α l'angle de $\mathbf{r}$ avec $z'z$, on écrit l'expression de $\mathbf{H}$ sous la forme

$$\mathrm{H}(ct - z) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^{-2} \sin\alpha\, i(ct - z')\, dz', \tag{8}$$

et par conséquent celle de l'impulsion $\mathbf{p}(t)$ reçue par l'aimant

$$p(t) \equiv \iiiint \mathrm{M}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\, dv\, dt = -c^{-1} \iiint \mathrm{MH}(t)\, dv; \tag{9}$$

compte tenu de (8), (7) et de l'expression du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ de l'aimant en un point de l'axe z,

$$\mathrm{A}_z = \iiint r^{-2} \sin\alpha\, \mathrm{M}\, dv, \tag{10}$$

(9) se récrit comme on l'annonçait

$$-\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(ct - z)\, \mathbf{A}(z)\, dz; \tag{11}$$

le principe de conservation de l'impulsion est donc respecté pourvu qu'on prenne en considération cette impulsion potentielle avec, pour le potentiel vecteur de l'aimant, la jauge bien déterminée (10). Nous avons déjà fait observer [2] que *cette jauge est précisément celle compatible avec l'hypothèse broglienne* [3] *d'une masse propre non nulle du photon.*

Remarques complémentaires. — Rappelons qu'un théorème dû à Vaschy [4] établit le résultat à première vue surprenant que la mutuelle énergie d'un courant variable (ou déplaçable) et d'un aimant fixe à aimantation rigide n'est pas $\iiint \mathbf{M}.\mathbf{H}\, dv$, mais 0. Ce résultat n'empêche nullement que, si le courant variable retourne l'aimantation $\mathbf{M}(\Delta\mathbf{M}' = -2\mathbf{M})$ une énergie $\iiint \Delta\mathbf{M}.\mathbf{H}\, dv$ s'extériorise, ce qui prouve qu'en un sens l'énergie

$\iiint \mathbf{M}.\mathbf{H}\, dv$ était emmagasinée. Cette remarque souligne à quel point les problèmes d'impulsion-énergie du champ électromagnétique sont quelquefois délicats.

Le théorème de Vaschy a un analogue dans notre cas car, le potentiel électrique V créé par l'aimant étant identiquement nul, la charge accompagnant le signal n'acquiert aucune énergie potentielle, et par conséquent l'aimant ne reçoit aucune énergie compensatrice.

Rappelons alors l'expression

$$f^i \equiv B^{ik} j_k + \frac{1}{4}[B^{kl}\partial^i H_{kl} - H_{kl}\partial^i B^{kl}] = \partial_k \mathfrak{M}^{ik} \tag{12}$$

de la densité de force de Minkowski (5), ou B^{ij} désigne le tenseur champ électrique-induction magnétique, H^{ij} le tenseur induction électrique-champ magnétique, j^k la densité de courant-charge, et $\mathfrak{M}^{ij}$ le tenseur élastique bien connu de Maxwell-Minkowski; $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = ict$. Le premier terme de f^i, soit $f^i_{(1)}$, représente la densité de force-puissance de Lorentz et le second, soit $f^i_{(2)}$, celle appliquée aux corps polarisés par les champs inhomogènes (densité de force-puissance « de Stern et Gerlach »). C'est cette dernière qui intervient dans notre problème.

Or, il résulte de ce qui précède que les trois composantes spatiales de $f^i_{(2)}$ sont ici celles d'une véritable densité de force appliquée à l'aimant, tandis que la composante temporelle ne représente pas une densité de puissance fournie à l'aimant (ceci, en vertu de l'analogue du théorème de Vaschy). Ce fait est sûrement lié à ce que (contrairement à $f^i_{(1)}$) $f^i_{(2)}$ n'est pas identiquement orthogonal à la 4-vitesse du corps considéré.

Conclusions. — Nous pensons que l'expérience *ad hoc* ici discutée de régime variable et de potentiel vecteur irrotationnel établit sans ambiguité que *le potentiel vecteur peut jouer un rôle physique* et que, par voie de corollaire, *sa jauge n'est pas arbitraire, mais fixée.* Nous trouvons significatif que la jauge ainsi imposée (par le principe de conservation de l'impulsion) soit précisément celle compatible avec l'hypothèse broglienne d'un photon de masse propre non nulle.

Cette Note [comme les précédentes (1), (2)], et comme le théorème de Vaschy, souligne le caractère éventuellement très délicat des problèmes d'impulsion-énergie du champ électromagnétique. Nous avons récemment donné (6) un formalisme très général pour traiter ces problèmes.

(*) Séance du 23 janvier 1967.
(1) O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 263, série B, 1966, p. 1089.
(2) O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 4637.
(3) L. de Broglie, *Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs*, Gauthier-Villars, Paris, 1949, chap. V.
(4) *Voir* L. de Broglie, *Portugaliae Physica*, 3, 1949, p. 1; ou E. Durand, *Electrostatique et magnétostatique*, Masson, Paris, 1953, p. 706.
(5) H. Minkowski, *Math. Ann.*, 68, 1910, p. 472; *voir* formule (91), p. 511.
(6) O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 263, série B, 1966, p. 1362.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie*, *Paris*, 5e.)