C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 853-856 (25 novembre 1968). Série A

RELATIVITÉ. — *Le « défaut de masse » d'un système lié en théorie de l'interaction électromagnétique de Wheeler et Feynman. Nouvelle expression de l'impulsion-énergie totale du système.* Note (*) de M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD, présentée par M. Louis de Broglie.

1. On sait que la théorie de Darwin (1) pour l'interaction électromagnétique d'un système de charges ponctuelles Q_a de masses propres m_a et vitesses $\mathbf{v}_a \equiv c\boldsymbol{\beta}_a$ tient compte des effets relativistes jusqu'à l'ordre c^{-2} inclus, et se présente comme une théorie d'action instantanée à distance sans rayonnement. Elle fournit pour l'énergie totale conservée l'expression

$$(1)\qquad W = c^2 M = \sum_a c^2 m_a\left(1 + \frac{1}{2}\beta_a^2\right) + \frac{1}{2}\sum_a \sum_{b \neq a} Q_a Q_b r_{ab}^{-1}$$

où les

$$(2)\qquad \mathbf{r}_{ab} \equiv \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

désignent les distances des charges ponctuelles deux à deux. En substituant dans (1) l'expression

$$(3)\qquad V_{(a)} \equiv -\sum_{b \neq a} Q_b r_{ab}^{-1}$$

du potentiel créé en a par les autres charges, on obtient

$$(4)\qquad W \equiv c^2 M = \sum_a \left\{ c^2 m_a\left(1 + \frac{1}{2}\beta_a^2\right) - \frac{1}{2} Q_a V_{(a)} \right\}$$

qui est l'expression du théorème de l'énergie cinétique, compte tenu de l'énergie potentielle électrostatique et de l'équivalence entre masses et énergies.

Étant donné que la théorie de Darwin peut être considérée (2) comme l'approximation d'ordre c^{-2} de la théorie complètement covariante, sans rayonnement, de l'interaction électromagnétique de Wheeler et Feynman [(3), (4)], il est légitime de chercher la formule qui généralisera (1) en théorie de Wheeler-Feynman. Notant V_a^i, $V_i V^i = -c^2$, la quadrivitesse du point matériel chargé $a^i(\alpha)$, avec $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ et $x^4 = ict$,

$$(5)\qquad r_{ab}^i \equiv a^i - b^i, \qquad r^2 = r_i r^i,$$

les distances entre paires d'instants-points et

$$(6)\qquad A_{(a)}^i \equiv -\frac{1}{4\pi}\sum_{b \neq a} Q_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta(r^2)\, db^i$$

le potentiel semi-retardé et semi-avancée créé en a^i par les autres charges, nous partirons des trois formules démontrées par Wheeler et Feynman

$$d(m_a V_a^i - Q_a A_{(a)}^i) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)\, r^i\, da^k\, db_k; \tag{7}$$

$$dQ_a A_{(a)}^i = \frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)\, r^k\, da_k\, db^i; \tag{8}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)\, r^k\, da^i\, db_k. \tag{9}$$

On déduit de là, n désignant un multiplicateur commun de (8) et (9), la forme suivante des équations du mouvement :

$$\begin{aligned} &d[m_a V_a^i + (n-1) Q_a A_{(a)}^i] \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)[r^i\, da_k\, db^k - n r^k (da^i\, db^k + da^k\, db^i)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Posant alors

$${}_nP_a^i \equiv m_a V_a^i + (n-1) Q_a A_{(a)}^i; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} {}_nP_{ab}^i \equiv \frac{1}{2\pi} Q_a Q_b &\left\{ \int_\alpha^{+\infty} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} \int_\beta^{+\infty} \right\} \delta'(r^2) \\ &\times [r^i\, da^k\, db_k - n r_k (da^i\, db^k + da^k\, db^i)], \end{aligned} \tag{12}$$

l'on déduit de ce qui précède, à la manière de Wheeler et Feynman, la loi de conservation de l'impulsion-énergie

$$\sum_a {}_nP_a^i + \sum_a \sum_{b\neq a} {}_nP_{ab}^i = P_0^i, \tag{13}$$

où P_0^i désigne un quadrivecteur constant qu'on peut considérer comme indépendant de n.

Wheeler et Feynman ont donné les formes de (13) correspondant à $n = 0$ et $n = 1$, mais nous avons indiqué en commençant que c'est la forme correspondant à $n = 1/2$ qui devrait être physiquement la plus intéressante.

Il est remarquable que la valeur $n = 1/2$ fait apparaître dans (12) (où les r_{ab}^i sont pris du genre espace) les champs retardé $\underline{H}$ et avancé $\overline{H}$ créés en a (et en b)

$$\underline{H}_{(a)}^{ij} = \frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{-\infty}^{\beta} \delta'(r^2)[r_{ab}^j\, db^i - r_{ab}^i\, db^j], \tag{14}$$

$$\overline{H}_{(a)}^{ij} = \frac{1}{2\pi}\sum_{b\neq a} Q_a Q_b \int_{\beta}^{+\infty} \delta'(r^2)[r_{ab}^j\, db^i - r_{ab}^i\, db^j], \tag{15}$$

en sorte que (13) se récrit, pour $n = 1/2$, *et moyennant la convention que les* β *sont maintenus fixes,*

$$\sum_a \left\{ m_a V_a^i - \frac{1}{2} Q_a A_{(a)}^i + \frac{1}{2}\int_\alpha^{+\infty} \underline{H}_{(a)}^{ik}\, da_k - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\alpha} \overline{H}_{(a)}^{ik}\, da_k \right\} = P_0^i. \tag{16}$$

ce qui est la généralisation cherchée de la formule classique (4). Pour un système lié, les valeurs moyennes au pseudo-instant α du point $a^i(\alpha)$ des impulsions-énergies fournies par les champs retardé et avancé des autres charges sont nécessairement nulles :

$$(17)\qquad \left\langle \int_{\alpha}^{+\infty} \mathrm{H}_{(a)}^{ik}\, da_k \right\rangle = 0 = \left\langle \int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{H}_{(a)}^{ik}\, da_k \right\rangle,$$

en sorte que (16) a pour conséquence

$$(18)\qquad \left\langle \sum_a \left\{ m_a \mathrm{V}_a^i - \frac{1}{2} \mathrm{Q}_a \mathrm{A}_{(a)}^i \right\} \right\rangle = \mathrm{P}_0^i;$$

en ce sens, $-(1/2)\sum \mathrm{Q}_a \mathrm{A}_{(a)}^i$ est le « défaut de masse » du système lié ([5]).

2. La formule (16) suggère de poursuivre dans la ligne du calcul commencé. Toujours pour $n = 1/2$, (12) s'écrit

$$(19)\qquad {}_{\frac{1}{2}}\mathrm{P}_{ab}^i = \frac{1}{4\pi} \mathrm{Q}_a \mathrm{Q}_b$$
$$\times \Bigg[\left\{ \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \int_{\beta}^{+\infty} \right\} \delta'(r^2)\,(r^i\, da^k - r^k\, da^i)\, db_k$$
$$+ \left\{ \int_{\alpha}^{+\infty} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \right\} \delta'(r^2)\,(r^i\, db^k - r^k\, db^i)\, da_k$$
$$+ \left\{ \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{\alpha}^{+\infty} \int_{\beta}^{+\infty} \right\} \delta'(r^2)\, r_k\,(da^k\, db^i - da^i\, db^k) \Bigg],$$

ce qui, compte tenu de l'expression

$$(20)\qquad \mathrm{H}_{(a)}^{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{b \neq a} \mathrm{Q}_a \mathrm{Q}_b \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)\,[r_{ab}^j\, db^i - r_{ab}^i\, db^j]$$

du champ semi-retardé et avancé en a et des équations du mouvement (10) pour $n = 1$

$$(21)\qquad dm_a \mathrm{V}_a^i = \mathrm{H}_{(a)}^{ij}\, da_j,$$

donne la loi de conservation

$$(22)\qquad -\sum_a \left(m_a \mathrm{V}_a^i + \frac{1}{2} \mathrm{Q}_a \mathrm{A}_{(a)}^i \right)$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{\alpha}^{+\infty} \int_{\beta}^{+\infty} \right\} \delta'(r^2)\, r_k\,(da^k\, db^i - da^i\, db^k) = \mathrm{P}_0^i.$$

Différenciant dans (22) l'un des paramètres, α, l'on obtient une loi d'action et réaction du type « échelle de Jacob » [([3]), ([4])]

$$(23)\qquad d\left(m_a \mathrm{V}_a^i + \frac{1}{2} \mathrm{Q}_a \mathrm{A}_{(a)}^i \right)$$
$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{b \neq a} \mathrm{Q}_a \mathrm{Q}_b \int_{\beta=-\infty}^{+\infty} \delta'(r^2)\,(a_k - b_k)\,[da^k\, db^i - db^k\, da^i].$$

Notons le signe + dans la première parenthèse de (22) et (23), à comparer au signe — dans (7) et (16).

(*) Séance du 13 novembre 1968.

([1]) C. G. DARWIN, *Phil. Mag.*, 39, 1920, p. 537.

([2]) J. L. ANDERSON, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press, 1967, p. 225-227.

([3]) J. A. WHEELER et R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, 21, 1949, p. 425.

([4]) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Precis of Special Relativity*, Academic Press, 1967, p. 98-105.

([5]) F. ROHRLICH (*Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, 1965, p. 386) indique une formule de conservation de l'impulsion-énergie totale du système qui est incompatible avec (4), (18), et les formules données par Wheeler et Feynman. Ce point a été discuté par A. Conort (*Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 857).

(*Laboratoire de Physique théorique, associé au C. N. R. S., Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-et-Marie-Curie, 75-Paris,* 5e.)

178689. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.