C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 574-576 (10 mars 1969). **Série A**

RELATIVITÉ. — *« Défaut de masse » et invariance de jauge en théorie de l'interaction électromagnétique de Wheeler et Feynman.* Note (*) de

M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous voulons préciser et rectifier ce que nous avons précédemment écrit sur le sujet [1].

1. En théorie de l'interaction électromagnétique de Wheeler et Feynman [2] chaque point matériel $a^i(\alpha)$ de charge Q_a et d'impulsion-masse p_a^i obéit à l'équation du mouvement classique

$$dp_a^i = Q_a H_{(a)}^{ij} \, da_j, \tag{1}$$

où

$$H_{(a)}^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{b \neq a} Q_b \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(r_{ab}^2) \, [r_{ab}^j \, db^i - r_{ab}^i \, db^j], \tag{2}$$

avec

$$r_{ab}^i \equiv a^i - b^i, \qquad r^2 \equiv r_i r^i, \tag{3}$$

désigne le champ semi-retardé et avancé créé en a^i par les autres charges $b^i, \ldots$; δ' désigne la dérivée de la distribution de Dirac relativement à son argument, et les α sont des paramètres unicursaux des trajectoires du genre temps variant de $-\infty$ à $+\infty$.

L'intégrale de (1) de forme temporellement symétrique est évidemment

$$p_a^i(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{ p_a^i(-\infty) + p_a^i(+\infty) + Q_a \int_{-\infty}^{\alpha} H_{(a)}^{ij} \, da_j - Q_a \int_{\alpha}^{+\infty} H_{(a)}^{ij} \, da_j \right\}; \tag{4}$$

dans le cas particulier de deux charges répulsives en interaction,

$$\sum_a p_a^i(-\infty) = \sum_a p_a^i(+\infty), \tag{5}$$

en sorte qu'alors l'expression

$$p_{\text{int}}^i(\alpha, \ldots) \equiv \frac{1}{2} \sum_a Q_a \left\{ \int_{\alpha}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\alpha} \right\} H_{(a)}^{ij} \, da_j \tag{6}$$

représente précisément, sans constante additive, l'impulsion-énergie d'interaction du système. Par une convention naturelle on retiendra cette interprétation dans le cas général de n charges interagissantes.

Montrons à présent que l'impulsion-énergie d'interaction de Wheeler et Feynman :

$$p_{\text{int}}^i(\alpha, \beta, \ldots) \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_a \sum_{b \neq a} Q_a Q_b \left\{ \int_{\alpha}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{\beta}^{+\infty} \right\} \times \delta'(r^2) \, [r^i \, da^k \, db_k - r_k (da^i \, db^k + da^k \, db^i)] \tag{7}$$

est précisément égale à (6). Par construction même cette expression (où la dernière parenthèse pourrait être écrite $-2r_k\, da^i\, db^k$ si elle ne devait être soumise à des opérations dissymétriques en a et b) est invariante par les substitutions $a \rightleftharpoons b$. Pour la même raison les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{\beta} \text{ et } \int_{\alpha}^{+\infty}\int_{\beta}^{+\infty} \text{de } \delta'(r^2)\,[\,r^i\, da^k\, db_k - r_k(da^i\, db^k + da^k\, db^i)\,]$$

sont identiquement nulles, en sorte que l'expression (7) sera conservée si l'on y remplace les opérations $\int_{-\infty}^{\beta}$ et $\int_{\beta}^{+\infty}$ par $\int_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty}$; compte tenu alors de la définition (2) et de l'identité

$$\int_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \delta'(r^2)\, r^k\, da^i\, db_k = 0, \tag{8}$$

on ramène l'expression (7) à la forme (6) comme il était annoncé.

2. Dans une Note précédente [3] relative à l'approximation « instantanée » de Darwin [4] nous avions légèrement étendu une considération de L. de Broglie [5], L. Brillouin [6] et R. Lucas [7] relative à la fixation de la jauge du potentiel électrique par la « pesée » de l'énergie d'interaction. Il est clair par ce qui précède (et contrairement à ce que nous avions pensé) qu'un résultat similaire ne se retrouve pas dans la théorie complètement covariante. La raison générale pour laquelle il ne peut pas se retrouver dans une théorie multi-temporelle est que l'expression « instantanée » de la quantité conservée $\sum (c^2 m_a - Q_a V_{(a)}/2)$ n'y a pas d'analogue; les quantités $p_a^i - Q_a A_{(a)}^i/2$ ne peuvent pas être individuellement conservées, car leurs variations dépendent des rapports Q_a/m_{0a}.

3. Ceci nous amène à rechercher s'il existe en théorie de Wheeler et Feynman des transformations de jauge s'harmonisant avec le formalisme général de la théorie. La réponse est affirmative.

Le gradient de la fonction

$$U_{(a)} \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_{b \neq a} Q_b \int_{\beta} \delta(r_{ab}^2)\,(a^k - b^k)\, db_k \tag{9}$$

s'écrit en effet

$$\partial^i U_{(a)} = -A_{(a)}^i + \frac{1}{2\pi} \sum_{b \neq a} Q_b \int_{\beta} \delta'(r^2)\, r^i\, r^k\, db_k, \tag{10}$$

$$A_{(a)}^i \equiv -\frac{1}{4\pi} \sum_{b \neq a} Q_b \int \delta(r^2)\, db^i \tag{11}$$

désignant le potentiel de Wheeler et Feynman; un potentiel admissible plus général est donc, k étant arbitraire,

$$B_{(a)}^i = (1-k)\, A_{(a)}^i + \frac{k}{2\pi} \sum_{b \neq a} Q_b \int \delta'(r^2)\, r^i\, r^k\, db_k. \tag{12}$$

3. Rappelons par contre que dans la théorie covariante de l'interaction entre un dipôle magnétique et une charge électrique ([8]) la jauge du potentiel du dipôle semble fixée par le fait que sa dépendance de la distance doit être la même que celle du champ de la charge.

(*) Séance du 3 mars 1969.

([1]) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 267, série A, 1968, p. 853.
([2]) J. A. WHEELER et R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.*, 21, 1949, p. 425.
([3]) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Phys. Lett.*, 28 A, 1968, p. 365.
([4]) C. G. DARWIN, *Phil. Mag.*, 39, 1920, p. 537.
([5]) L. DE BROGLIE, *Comptes rendus*, 255, 1947, p. 163; *Optique électronique et corpusculaire*, Hermann, Paris, 1950, p. 45-49.
([6]) L. BRILLOUIN, *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 2361; *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.*, 53, 1964, p. 475 et 1280.
([7]) R. LUCAS, *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 2359.
([8]) O. COSTA DE BEAUREGARD, *Comptes rendus*, 264, série B, 1967, p. 565.

(Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S., Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75-Paris, 5e.)