C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 1078-1081 (24 novembre 1969). Série B

MÉCANIQUE QUANTIQUE. — *Sur la densité de couple électromagnétique et la densité de « force magnétodynamique » appliquées au fluide électronique de la théorie de Dirac.* Note (*) de M. **Olivier Costa de Beauregard**, présentée par M. Louis de Broglie.

1. On sait qu'il semble à première vue assez difficile [1] de faire apparaître, en théorie de Dirac, l'expression de la densité de force magnétodynamique et de son homologue électrique $\partial(\mathbf{E}\wedge\mathbf{m}+\mathbf{B}\wedge\mathbf{p})/c\,\partial t$ [2] (unités mixtes) appliquées par un champ électromagnétique extérieur $B^{ij}\equiv(\mathbf{B},\mathbf{E})$ à la densité de polarisation $m^{ij}\equiv(\mathbf{m},-\mathbf{p})$ du fluide électronique de Dirac ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = ict$).

On peut rapprocher cette difficulté de celle, plus ancienne, liée à la définition par E. Durand [3] de la densité de spin $\tau^{[ij]k}$ liée à la densité de couple classique $B^{il}m^{j}{}_{l}-B^{jl}m^{i}{}_{l}$ appliquée par le champ

$$B^{ij}\equiv\partial^j A^i-\partial^i A^j \qquad \text{avec} \quad \partial_i A^i=0 \tag{1}$$

à la densité de polarisation m^{ij} : on ne voit pas à première vue pourquoi cette nouvelle densité de spin n'est pas identique à celle $\sigma^{[ijk]}$ de Dirac.

Nous allons montrer que ces deux difficultés d'interprétation sont effectivement liées et qu'elles se résolvent très naturellement d'une manière univoque par une combinaison appropriée de certaines des équations densitaires conséquences de la théorie de Dirac.

2. Des équations de Dirac du premier ordre

$$\{\gamma_l(\overset{\rightarrow}{\partial^l}-i\varepsilon A^l)+\varkappa\}\psi=0, \qquad \overline{\psi}\{\gamma_l(-\overset{\leftarrow}{\partial^l}-i\varepsilon A^l)+\varkappa\}=0, \tag{2}$$

où $\varepsilon\equiv e/c\hbar$ et $\varkappa\equiv cm/\hbar$ ($-e$, charge et m, masse propre de l'électron), $\overline{\psi}\equiv\psi^+\gamma^4$, on déduit [4] les 10 relations tensorielles de Franz [5]-Kofink [6] desquelles nous retenons ici

$$T^{jl}-T^{lj}=\partial_k\sigma^{[ljk]} \tag{3}$$

et

$$\sigma^{[ljkl]}=\sum_{\text{circ.}}\tau^{l[jk]}+\partial_l\omega^{[ijkl]}; \tag{4}$$

elles font intervenir ($\gamma^{ij\cdots}=\gamma^i\gamma^j\ldots$ si tous les indices sont différents, 0 sinon; $[\partial^i]\equiv\overset{\rightarrow}{\partial^i}-\overset{\leftarrow}{\partial^i}$) la *densité de courant de Dirac :*

$$j^l=-ie\overline{\psi}\gamma^l\psi, \tag{5}$$

la *densité de polarisation électromagnétique :*

$$m^{[ij]} \equiv \frac{ie}{2\varkappa}\bar{\psi}\gamma^{ij}\psi, \tag{6}$$

la *densité de spin de Dirac :*

$$\sigma^{[ijk]} \equiv -\frac{c\hbar}{2}\bar{\psi}\gamma^{ijk}\psi, \tag{7}$$

le *pseudo-scalaire :*

$$\omega^{[ijkl]} \equiv \frac{c\hbar}{4\varkappa}\bar{\psi}\gamma^{ijkl}\psi, \tag{8}$$

le *tenseur d'impulsion-énergie canonique* (7) :

$$T^{kl} \equiv \frac{c\hbar}{2}\bar{\psi}[\partial^k]\gamma^l\psi - A^k j^l \tag{9}$$

et la *densité de spin de Durand* (3) :

$$\tau^{i[kl]} \equiv -\frac{c\hbar}{4\varkappa}\bar{\psi}[\partial^i]\gamma^{kl}\psi - A^i m^{[kl]}. \tag{10}$$

Des équations de Dirac du second ordre :

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{\overrightarrow{\partial}_i^{\,i} - \varepsilon^2 A_i A^i - 2i\varepsilon A_i \overrightarrow{\partial}^i + \frac{i\varepsilon}{2}\gamma^{ij}B_{ij} - \varkappa^2\right\}\psi = 0, \\ &\bar{\psi}\left\{\overleftarrow{\partial}_i^{\,i} - \varepsilon^2 A_i A^i + 2i\varepsilon \overleftarrow{\partial}^i A_i + \frac{i\varepsilon}{2}\gamma^{ij}B_{ij} - \varkappa^2\right\} = 0, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

E. Durand (3) a déduit semblablement 10 équations tensorielles desquelles nous retenons la *formule de la densité de force de Lorentz* (7) :

$$\partial_j T^{ij} = B^{ik} j_k = \partial_j T^{ji} \tag{12}$$

[on a tenu compte de (3)] et la *formule de la densité de couple de Durand :*

$$\partial_i \tau^{i[kl]} = B^{ki} m^l{}_i - B^{li} m^k{}_i. \tag{13}$$

3. De (3) et (4), nous déduisons

$$S^{ji} - S^{ij} = \partial_k \tau^{k[ij]}. \tag{14}$$

où S^{ij} est un nouveau tenseur d'impulsion-énergie défini suivant

$$S^{ij} = T^{ij} + \partial_k\left(\alpha\tau^{i[kj]} + (\alpha - 1)\tau^{j[ki]}\right), \tag{15}$$

où α est un facteur provisoirement arbitraire. C'est, on le voit, le tenseur d'impulsion-énergie naturellement associé à la densité de spin de Durand.

Pour lever l'arbitraire sur α utilisons l'identité

$$\partial_k[x^i S^{jk} - x^j S^{ik}] \equiv x^i \partial_k S^{jk} - x^j \partial_k S^{ik} + S^{ji} - S^{ij} \tag{16}$$

qui intervient dans le calcul de la densité de couple associée à la densité de force $\partial_j S^{ij}$, ainsi que le postulat

$$\partial_j S^{ij} = \partial_j T^{ij} = f^i. \tag{17}$$

Il vient, d'après (15) :

$$\alpha = 1, \qquad S^{ij} = T^{ij} + \partial_k \tau^{i[kj]}, \tag{18}$$

puis, en posant

$$f^{*i} \equiv \partial_k [B^{ki} m^l{}_i - B^{li} m^k{}_i] \tag{19}$$

et faisant jouer (13),

$$\partial_i S^{ij} = f^j + f^{*j}. \tag{20}$$

4. Détaillons le contenu de (13) en termes prérelativistes d'après les formules (où $u, v, w = 1, 2, 3$ par permutation circulaire) :

$$B^u = B^{vw}, \qquad E^u = i B^{u4}; \qquad m^u = m^{vw}, \qquad p^u = -i m^{u4}; \tag{21}$$

il vient l'expression de la densité de couple électromagnétique classique et de son corollaire relativiste (« boost » des auteurs de langue anglaise) :

$$\begin{cases} \partial_l \tau^{l[uv]} = [\mathbf{H} \wedge \mathbf{m} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{p}]^{uv}, \\ i \partial_l \tau^{l[u4]} = [\mathbf{E} \wedge \mathbf{m} + \mathbf{p} \wedge \mathbf{B}]^{vw}. \end{cases} \tag{22}$$

Par ailleurs, intégrant (19) dans le 4-volume compris entre deux hyperplans t et $t + dt$, on obtient, compte tenu de (21) et (14) (avec nécessairement $k = 4$ et $j = u$) :

$$dt \iiint \mathbf{f}^* \, d\mathbf{x}^3 = c^{-1} \, d \iiint [\mathbf{E} \wedge \mathbf{m} + \mathbf{p} \wedge \mathbf{B}] \, d\mathbf{x}^3; \tag{23}$$

c'est précisément la variation d'impulsion résultant de la force magnétodynamique et de son homologue électrique [2]. Telle est donc l'interprétation du « boost ».

5. *En conclusion*, on a vu comment rendre compte univoquement de la densité de couple électromagnétique (13) ainsi que de la densité de force magnétodynamique augmentée de son homologue électrique (19), en plein accord avec les idées classiques et sans l'apparition d'aucun paradoxe.

Dans la mesure où l'on peut admettre que le fluide électronique de Dirac donne une bonne image de la polarisation ferromagnétique macroscopique, il résulte de ce qui précède que le comportement en rotation et en translation d'un aimant soumis à un champ électromagnétique extérieur quelconque sera exactement le même que celui prévu par les descriptions coulombienne et ampérienne [[8], [9]] du magnétisme.

Mais il s'agit là seulement d'une « correspondance » macroscopique et statistique. En effet, aucun opérateur d'impulsion-énergie ne peut être canoniquement associé à la divergence de la densité de spin de Durand (10). Ceci revient à dire que le « boost » (22_2), ou que le « moment barycentrique » qui est le corollaire relativiste du moment cinétique [10], reste un concept *sui generis*.

(*) Séance du 17 novembre 1969.

[1] A. CONORT, *Comptes rendus*, 266, série B, 1968, p. 1184.

[2] M. JOUGUET, *Traité d'Électricité théorique*, Gauthier-Villars, Paris, 3, 1960, p. 126 et 4, 1968, p. 285.

[3] E. DURAND, *Comptes rendus*, 218, 1944, p. 36.

[4] O. COSTA DE BEAUREGARD, *J. Math. pures et appl.*, 22, 1943, p. 67-75.

[5] W. FRANZ, *Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, 3, 1935, p. 379.

[6] W. KOFINK, *Ann. Physik*, 38, 1940, p. 565.

[7] H. TETRODE, *Z. Phys.*, 49, 1928, p. 858.

[8] P. PENFIELD et H. HAUS, *Electrodynamics of Moving Media*, Cambridge, U. S. A., M. I. T. Press, 1967, p. 205.

[9] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Phys. Lett.*, 24 A, 1967, p. 174.

[10] O. COSTA DE BEAUREGARD, *La Théorie de la Relativité restreinte*, Masson, Paris, 1949, p. 110.

(Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S., Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75-Paris, 5e.)

180786. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e). Imprimé en France.