RELATIVITÉ. – Expression covariante des deux principes de la thermodynamique relativiste. Quelques conséquences. Note (*) de M. Olivier Costa de Beauregard, présentée par M. André Lichnerowicz.

Aux différentielles exactes et aux pfaffiens de la thermodynamique classique nous faisons respectivement correspondre des tenseurs densités conservatifs et non conservatifs.

1. Nous n'acceptons comme relativiste qu'une théorie dont la covariance tensorielle est explicite — en fait exprimée par des équations aux dérivées partielles portant sur des densités. Plusieurs travaux [(¹), (²), (³), (⁵)] sont conformes à ce schéma, mais l'expression covariante des « deux principes » n'ayant jamais été produite avec la généralité désirable, l'assentiment des thermodynamiciens est resté réticent, et plusieurs d'entre eux proposent des formalismes non manifestement covariants.

Pour mettre fin à cette situation nous proposons l'expression covariante suivante des « deux principes » : à chaque différentielle exacte de la thermodynamique classique (énergie interne ou totale U; entropie S du cas réversible) nous ferons correspondre un tenseur densité conservatif $(u^{ij}; s^i)$; à chaque pfaffien de la thermodynamique classique (travail W, chaleur Q; entropie S du cas non réversible) nous ferons correspondre un tenseur densité non conservatif $(w^{ij}, q^{ij}; s^i)$.

2. Premier principe. — Il existe un tenseur densité d'impulsion-énergie totale u^{ij}, non nécessairement symétrique, conservatif

$$\partial_j u^{ij} = 0;$$

i, j, k, l = 1, 2, 3, 4; $x^4 = ict$. Il est la somme des tenseurs densité de travail w^{ij} et densité de chaleur q^{ij}

$$u^{ij} = w^{ij} + q^{ij}$$

non séparément conservatifs:

(3)
$$f^{i} \equiv \partial_{j} w^{ij} = -\partial_{j} q^{ij} \neq 0 \text{ en général};$$

f' dénote la 4-densité de force bien connue.

Si le système est un fluide de 4-vitesse Vi:

le premier principe se récrit

(5)
$$\iiint_{\mathscr{C}_2 - \mathscr{C}_1 + \mathscr{P}} (w^{ij} + q^{ij}) \, du_j = 0,$$

où \mathscr{C}_1 et \mathscr{C}_2 , état initial et état final, désignent deux hypercloisons du genre espace d'un tube fluide, et \mathscr{P} l'hyperparoi du genre temps joignant les contours de \mathscr{C}_1 et \mathscr{C}_2 ;

$$icdu_i = \left[dx^j \, dx^k \, dx^l \right].$$

Ainsi, l'exigence de la covariance entraıne nécessairement que le travail et la chaleur soient des grandeurs d'état cachées

(6)
$$W_{\mathscr{C}}^{i} = \iiint_{\mathscr{C}} w^{ij} du_{j}, \qquad Q_{\mathscr{C}}^{i} = \iiint_{\mathscr{C}} q^{ij} du_{j},$$

alors que la thermodynamique classique ne voulait connaître sur & que l'énergie totale

$$U_{\mathscr{C}}^{i} = \iiint_{\mathscr{C}} u^{ij} du_{j}.$$

Toutefois, sur \mathcal{P} elle distinguait nécessairement le travail et la chaleur, et la symétrie relativiste entre espace et temps ne peut tolérer cette différence de traitement. C'est là le nœud du « conflit » entre relativistes et thermodynamiciens.

Ayant reporté les distinctions essentielles au premier principe sur les densités, suivant (2) et (3), on peut dire que la thermodynamique relativiste fait nécessairement usage d'un calorique non conservatif.

3. Second principe. — Il existe au moins un 4-vecteur de champ, température inverse θ_j , dont le produit contracté par la densité de chaleur q^{ij} donne un 4-vecteur courant d'entropie conservatif dans le cas réversible

(8)
$$\theta_j q^{ij} = s^i,$$

ou bien (définition plus restrictive et plus constructive que nous allons adopter) il existe un 4-vecteur de champ, température T^i , qui, multiplié par un 4-courant d'entropie s^i conservatif dans le cas réversible, redonne le tenseur densité de chaleur

$$q^{ij} = T^i s^j.$$

Le postulat d'existence du 4-vecteur θ_i ou T^i est un postulat de quasi-équilibre thermique local. Associé au concept de la 4-densité d'entropie s^j il entraı̂ne nécessairement que la chaleur d'expression (6_2) est une grandeur d'état.

Le 4-vecteur θ_j a été introduit par Van Dantzig (1) et utilisé par Bergmann et nousmême; le 4-vecteur T^i a été proposé par Eddington, Ott et Arzeliès, et utilisé par Schmid (2) et Grosjean (3).

D'une façon générale

$$\partial_i s^i \equiv \sigma \ge 0$$

est l'extension covariante du second principe selon Prigogine (4). L'avantage d'introduire explicitement σ est le même que celui d'introduire l'entropie non-compensée de Clausius : rétablir partout des égalités.

En général s^i sera non colinéaire à V^i et il y aura un flux d'entropie à travers l'hyperparoi \mathcal{P} . Bien entendu l'entropie finie S sera définie suivant

$$S_{\mathscr{C},\mathscr{P}} = \iiint_{\mathscr{C},\mathscr{P}} s^i du_i.$$

Le 4-vecteur T^i sera postulé du genre temps avec une composante temporelle « positive ». Introduisant la température scalaire T de Tolman utilisée par de nombreux auteurs (5),

$$c T = -V_i T^i \ge 0,$$

adoptons l'hypothèse plus restrictive encore

$$T^i = c^{-1} T V^i$$

qui autorise la définition du 4-courant de chaleur

$$a^i = T s^i$$

et l'écriture

(15)
$$q^{ij} = c^{-1} V^i q^j$$

du tenseur densité de chaleur. De (3), (8) et (4) on déduit une expression du premier principe

$$(16) c \partial_i q^i = -V_i f^i :$$

la divergence du 4-courant de chaleur égale $(-c^{-1} \text{ fois})$ la densité de puissance scalaire absorbée par le fluide $(^6)$.

De (16), (14) et (10) on déduit une expression du second principe

(17)
$$-V_i f^i - c S^i \partial_i T = c \sigma T \ge 0.$$

4. CYCLES DE CARNOT. - Quel que soit l'intégrand

$$\iiint_{\mathscr{C}_2} = \iiint_{\mathscr{C}_1},$$

(19)
$$\iiint V_i f^i d\omega = -c \iiint_{\mathscr{Q}} \operatorname{T} s^i du_i,$$

$$S_{\mathscr{P}} \equiv \iiint_{\mathscr{P}} s^i \, du_i \ge 0.$$

5. Conduction Thermique. — Notant C (T) la chaleur spécifique et γ (T) la conduction calorifique du fluide, nous conférons aux expressions classiques des densités de chaleur et de courant de chaleur l'expression covariante

(21)
$$q_i = V_i \int_{-T}^{T} C(T) dT - \gamma(T) \partial_i T$$

qui, portée dans (17), donne l'extension covariante de l'équation de Fourier (7) :

(22)
$$C(T) V^{i} \partial_{i} T - c \partial^{i} (\gamma \partial_{i} T) = -V_{i} f^{i} - \partial_{i} V^{i} \int^{T} C(T) dT.$$

usuellement écrite avec des sources nulles au second membre. Le premier terme de (22), issu du premier terme de (21), entraîne une propagation de la température à vitesse super-lumineuse; c'est le cas avec toutes les « équations de Fourier relativistes » jusqu'ici proposées, ce qui pose une énigme.

6. Chaleurs et températures généralisées. — A toute grandeur de rang tensoriel r soumise à la thermodynamique (moment angulaire, concentration chimique, etc.) on associera une chaleur Q, une « température inverse » θ et une « température » T de même rang r et présentant les mêmes symétries (température de spin, potentiel chimique scalaire, etc.). La densité de chaleur q correspondante, de rang r+1, sera associée à une contribution au 4-courant d'entropie par les formules généralisant (8) et (9), et

$$(23) s^i = \sum_r s^i.$$

- 7. Conclusion. Le précédent schème semble être une relativisation raisonnable des principes fondamentaux de la thermodynamique phénoménologique classique.
 - (*) Séance du 13 janvier 1975.

(1) D. VAN DANTZIG, Physica, 6, 1936, p. 673.

- (2) L. A. SCHMID, Nuovo Cim., 47 B, 1967, p. 1; 52 B, 1967, p. 288 et 317; A Critical Review of Thermodynamics, E. B. STUART, B. GAL-OR, A. J. BRAINARD eds., Mono Book Corp., Baltimore, 1970, p. 161.
- (3) P. V. GROSJEAN, Bull. Soc. Roy. Sci., Liège, 41, 1972, p. 31 et 43; 1974, p. 260; Modern Developments in Thermodynamics, B. Gal-Or ed., Wiley, New York, 1974, p. 181.
 - (4) I. PRIGOGINE, Thermodynamics of Irreversible Processes, Charles C. Thomas Publ., Illinois, 1955.
- (5) C. Eckart, Phys. Rev., 58, 1940, p. 919; A. H. Taub, Phys. Rev., 94, 1954, p. 1468; Pham Mau Quan, Ann. Mat. Pur. Appl. Bologna, 38, 1955, p. 181; G. Pichon, Ann. Inst. Henri Poincaré, 2, 1965, p. 21; C. Marle, Ann. Inst. Henri Poincaré, A 10, 1969, p. 67 et 127.
- (6) Voir O. Costa de Beauregard, La Théorie de la Relativité restreinte, Masson, Paris, 1949, p. 81 et 99.
- (7) Cette dérivation utilisant T^i est beaucoup plus directe que celle utilisant θ_j donnée par nous in réf. (6), p. 138.

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75005 Paris.