MÉCANIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE. — *Relation étroite entre la non-séparabilité d'Einstein-Podolsky-Rosen et la non-localité de la théorie des antiparticules de Feynman.* Note (*) de M. **Olivier Costa de Beauregard,** présentée par M. André Lichnerowicz.

L'amplitude de Feynman pour la transition d'annihilation d'une paire électron-positon libres contient les deux corrélations des polarisations des photons caractérisant respectivement les cascades atomiques 0 — 1 — 0 et 1 — 1 — 0. Le système total n'est en général ni P-, ni C-invariant, mais PC-invariant.

1. Afin d'exprimer formellement notre [1] récente assertion d'une connexion étroite entre la non-séparabilité [2] dite d'Einstein-Podolsky-Rosen [3] [qui serait justement dite d'Einstein [4]] et la non-localité au sens de la théorie particule-antiparticule de Feynman [5], nous écrivons, dans le repère du centre de gravité, l'amplitude de transition de Feynman pour l'annihilation d'un électron et d'un positon en deux photons, les quatre impulsions-énergies et les quatre polarisations étant fixées, et sélectionnons en particulier les cas où les quatre impulsions sont colinéaires. Nous trouvons alors que la corrélation des polarisations des photons est la superposition des deux corrélations [6] caractérisant les cascades atomiques des types $0-1-0$ et $1-1-0$. Prises séparément ces corrélations seraient P-invariantes, mais en superposition elles ne le sont pas; bien entendu elles sont PC-invariantes.

Ce résultat implique évidemment l'identité des deux concepts de la non-séparabilité d'Einstein [[3], [4]] [lorsqu'elle est discutée en termes de corrélation de polarisations [6]] et de la non-localité de Feynman [5].

2. L'amplitude de Feynman [5] pour l'annihilation (ou la création) d'un électron et d'un positon $\bar{\psi}_a$ et ψ_b, de masse propre m, en (ou à partir de) deux photons A_c et A_d, écrite dans le repère du centre de gravité, pour des états *fixes* des quatre impulsions $\pm\,\mathbf{p}$ et $\pm\,\mathbf{k}$ (et par conséquent des deux impulsions virtuelles $\mathbf{p}\mp\mathbf{k}$) et des quatre polarisations est (λ, μ = 1, 2, 3, 4; ρ = 1, 2, 3).

$$(1)\qquad \bar{\psi}_a\left\{\gamma_\lambda\frac{im+(p^\rho+k^\rho)\gamma_\rho}{m^2+(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{im+(p^\rho-k^\rho)\gamma_\rho}{m^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2}\gamma_\lambda\right\}\psi_b\,A_c^\lambda\,A_d^\mu.$$

Prenons l'axe x le long des impulsions des photons $\pm\,\mathbf{k}$ puis, compte tenu de l'invariance de jauge, $A^x=0$ et $A^4=0$, et posons $\gamma_{\rho\lambda\mu}=\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\mu$ lorsque les trois indices sont différents. Dans (1) :

$$\{m^2+(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\}^{-1}+\{m^2+(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2\}^{-1}$$

se met en facteur, en sorte que l'amplitude est proportionnelle à $\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$ avec

$$(2)\qquad \mathscr{A}_1=m\,\bar{\psi}_a\,\psi_b\,(A_c^y\,A_d^y+A_c^z\,A_d^z)+ik^x\,\bar{\psi}_a\,\gamma_{xyz}\,\psi_b\,[A_c^y\,A_d^z-A_c^z\,A_d^y]$$

et (λ, ρ = y, z).

$$(3)\qquad i\,\mathscr{A}_2=\bar{\psi}_a\,\gamma_\lambda\,\psi_b\,A_c^\lambda\,p_\rho\,A_d^\rho+\bar{\psi}_a\,\gamma_\lambda\,\psi_b\,A_d^\lambda\,p_\rho\,A_c^\rho.$$

Introduisant les polarisations circulaires gauche et droite des photons

$$(4)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\,G_c = A_c^y - i\,A_c^z, & \sqrt{2}\,D_c = A_c^y + i\,A_c^z, \\ \sqrt{2}\,G_d = A_d^y + i\,A_d^z, & \sqrt{2}\,D_d = A_d^y - i\,A_d^z, \end{cases}$$

l'on obtient

$$(5)\quad \mathscr{A}_1 = m\,\bar{\psi}_a\,\psi_b\,(G_c\,G_d + D_c\,D_d) + k^x\,\bar{\psi}_a\,\gamma_{xyz}\,\psi_b\,[G_c\,G_d - D_c\,D_d]$$

et pour $\mathscr{A}_2$ une combinaison linéaire de $G_c\,G_d$, $D_c\,D_d$, $G_c\,D_d$ et $D_c\,G_d$, les dernières contributions impliquant la présence de moment angulaire orbital.

Restreignons alors la discussion aux cas où $\mathscr{A}_2 \equiv 0$, c'est-à-dire où les impulsions $\pm\,\mathbf{p}$ des électrons sont colinéaires à celles $\pm\,\mathbf{k}$ des photons. L'expression de $\mathscr{A}_1$ peut alors être simplifiée.

Utilisant les relations $(\gamma_x\,p^x\text{-}im)\,\psi_b = 0$ et $p_x/k_x \equiv \beta$ nous récrivons (5) suivant

$$(6)\quad \mathscr{A}_1 = \beta\,\bar{\psi}_a\,\psi_b\,(G_c\,G_d + D_c\,D_d) + i\,\bar{\psi}_a\,\gamma_{yz}\,\psi_b\,[G_c\,G_d - D_c\,D_d].$$

La parenthèse et le crochet sont les contributions paire et impaire à l'amplitude de la paire de photons, chacune produisant, si elle était seule, une probabilité $\mathscr{A}^*\,\mathscr{A}$ P-invariante. Si cependant $\bar{\psi}_a\,\psi_b$ et $\bar{\psi}_a\,\gamma_{yz}\,\psi_b$ sont tous deux non-nuls, les deux contributions interfèrent et confèrent des poids inégaux aux deux états d'hélicité pure des photons, $G_c\,G_d$ et $D_c\,D_d$. Comme on devait s'y attendre le système n'est donc pas en général P-invariant, ni C-invariant puisque l'électron et le positon sont discernables.

Il est, par contre, PC-invariant. Si l'on échange l'association des signes des énergies aux signes des charges, il faut échanger les indices c et d, comme dans l'opération P.

Les deux états purs d'hélicité, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{D}$, du système, notés $G_c\,G_d$ ($D_c\,D_d = 0$) et $D_c\,D_d$ ($G_c\,G_d = 0$) dans l'état « deux photons », s'écrivent

$$(7)\quad \beta\,\bar{\psi}_a\,\psi_b \pm i\,\bar{\psi}_a\,\gamma_{yz}\,\psi_b \qquad (\beta\,\bar{\psi}_a\,\psi_b \mp i\,\bar{\psi}_a\,\gamma_{yz}\,\psi_b = 0)$$

dans l'état « $e_+\,e_-$ ». Adoptant une représentation standard des γ où γ_4, $-i\,\gamma_{yz}$ (spin suivant x) et $i\,\gamma_{4\,yz}$ (moment magnétique suivant x) sont diagonales avec les traces respectives $+1\ +1\ -1\ -1$, $+1\ -1\ +1\ -1$, $+1\ -1\ -1\ +1$, et utilisant les relations entre « grandes » et « petites » amplitudes $\bar{\psi}_a$ et ψ_b :

$$a_3 = \beta\,a_1 \equiv \beta\,g_a, \qquad a_4 = -\beta\,a_2 \equiv -\beta\,d_a, \qquad b_1 = -\beta\,b_3 \equiv -\beta\,g_b, \qquad b_2 = \beta\,b_4 \equiv \beta\,d_b,$$

nous récrivons (7) suivant

$$(8)\quad (1 \pm \beta)\,g_a\,g_b = (1 \mp \beta)\,d_a\,d_b,$$

les signes hauts et bas étant associés. Telle est, g_a, d_a et g_b, d_b dénotant les états d'hélicité de l'électron et du positon, la condition d'hélicité pure sur la paire $e_+\,e_-$. Dans le cas relativiste extrême, $\beta = \pm\,1$, $\mathscr{G} = g_a\,g_b$ et $\mathscr{D} = d_a\,d_b$. Le cas $\beta = 0$ est P– et C–invariant.

3. Conclusion. — La parenthèse et le crochet dans (2) ou (6) sont formellement les mêmes que dans les cascades atomiques $0-1-0$ et $1-1-0$ utilisées dans les récentes études expérimentales du paradoxe d'Einstein ([3]). Ceci montre bien l'identité des deux

concepts de la non-séparabilité [2] d'Einstein [[3], [4]] [discutée en termes de polarisations [6]] et de la non-localité du système particule-antiparticule de Feynman [5]. Incidemment, la covariance relativiste de la non-localité d'Einstein est ainsi rendue manifeste.

En passant de la représentation k (ici employée) à la représentation x, la non-séparabilité d'Einstein sera discutée en termes de deux mesures de position et de spin [1].

En utilisant l'algèbre des matrices β de Petiau-Duffin-Kemmer on obtient des formules analogues aux précédentes, qui seraient significatives dans le cas de deux particules chargées de spin 1.

(*) Séance du 4 octobre 1976.

[1] O. Costa de Beauregard, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 1251.

[2] B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, 3e partie, 1971; *Phys. Rev.*, D 11, 1975, p. 1424.

[3] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, *Phys. Rev.*, 47, 1935, p. 777. Dans cet article la discussion est non-relativiste.

[4] A. Einstein, in *Rapports et discussions du 5e Conseil Solvay*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 253-256.

[5] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, 76, 1949, p. 749 et 769. *Voir* spécialement p. 749, colonne 2.

[6] M. Horne, *Thèse miméographiée*, Boston University, 1970, chap. V.

Laboratoire de Physique théorique,
Institut Henri-Poincaré,
11, rue Pierre-et-Marie-Curie,
75005 Paris.