C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série II, p. 457-459, 1988 

Relativité/*Relativity*

# Sur le couplage entre une particule de spin 1/2 de Dirac ou spin 1 de Kemmer et le champ gravitationnel d'Einstein

Olivier COSTA DE BEAUREGARD

***Résumé*** — Franz a déduit de l'équation de Dirac 10 équations tensorielles, qui sont également conséquences de l'équation de Kemmer pour le spin 1, dont 5 ont une interprétation mécanique et 5 une interprétation électromagnétique. On montre ici qu'en l'absence d'un champ électromagnétique extérieur le « système mécanique » peut être exactement couplé à un champ gravitationnel riemannien *stricto sensu*. Ce schème généralise celui récemment proposé pour le cas du spin zéro.

## On the coupling of a spin 1/2 Dirac or a spin 1 Kemmer particle with Einstein's gravitational field

***Abstract*** — *Franz derived from the Dirac equation 10 tensorial equations, which also follow from Kemmer's spin 1 equation, 5 of which have a mechanical, and 5 an electromagnetic interpretation. We show here that in the absence of an external electromagnetic field the mechanical system can be exactly coupled to a* stricto sensu *Riemannian gravitational field. This scheme generalizes the one recently proposed for the spin zero case.*

1. Dans une précédente Note [1] on a discuté le couplage entre une particule de spin zéro de Proca et le champ gravitationnel d'Einstein.

On va étendre ici ce schème aux cas des particules de spin 1/2 de Dirac et 1 de Proca-Kemmer.

Le système (4) à (11) de la précédente Note [1] est une forme tronquée du système de 10 équations tensorielles tirées par Franz [2] de la théorie de Dirac, dont on vérifie qu'elles sont aussi conséquences du formalisme du spin 1 de Kemmer.

Franz, multipliant l'équation de Dirac à gauche par $\bar{\psi}\gamma$, et son adjointe à droite par $\gamma\psi$, avec successivement $\gamma = 1$, $\gamma^i$, $\gamma^i\gamma^j$, $\gamma^i\gamma^j\gamma^k$, $\gamma^{1234} \equiv \gamma^5$, ajoutant et retranchant, obtient 2 systèmes de 5 équations découplées en l'absence, mais couplées en présence d'un 4-potentiel $A^i$. L'un de ces systèmes, qui nous intéresse ici, est à interprétation mécanique, et l'autre à interprétation électromagnétique [3]. Ils portent sur 10 tenseurs, 5 de « type Dirac » $\bar{\psi}\gamma\psi$, 5 de « type Gordon » $(i/2)\bar{\psi}[\partial_i]\gamma\psi + e\,A_i\,\bar{\psi}\gamma\psi$; $-e$ note la charge de l'électron, $[\partial_i] = \underline{\partial}_i - \partial_i$ l'opérateur du courant de Gordon; nos unités sont telles que $c = 1$ et $\hbar = 1$.

Suivant leur rang de 0 à 4, nous noterons symboliquement ces tenseurs, respectivement, D0, ... D4 et G0, ..., G4.

Les 5 tenseurs figurant dans le « système mécanique » sont [3] : D0, densité de masse propre T; D3, densité de spin de Dirac $\sigma^{[ijk]}$; D4, pseudo-scalaire d'Uhlenbeck et Laporte [4] $\omega^{[ijkl]}$; G2, densité d'impulsion-énergie asymétrique de Tetrode [5] $T^{ij}$; G3, densité de spin de Durand [6] $\tau^{i\,[jk]}$. On remarque que la contribution potentielle, en $A^i$, des tenseurs mécaniques du type Gordon est de nature électromagnétique, savoir : dans G2, D1, courant de Dirac $j^i$; dans G3, D2, polarisation de Dirac $m^{[ij]}$. Le contraire est vrai, bien entendu, pour les 5 équations « électromagnétiques », en sorte que le « couplage électro-mécanique » est, en ce sens, symétrique.

Ces notations étant posées, notant de plus $k$ la fréquence propre de l'onde matérielle, et utilisant en vue de la suite le symbole de la dérivation covariante, le système des

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6305/88/03070457 $ 2.00 

5 « équations mécaniques » de Franz s'écrit [3]

(1) $$\mathrm{T} = \mathrm{T}^i_i,$$

(2) $$k^2 \tau^i_{[ij]} = \partial_j \mathrm{T},$$

(3) $$\mathrm{T}^{jk} - \mathrm{T}^{kj} = \mathrm{D}_i \sigma^{[ijk]},$$

(4) $$\sigma^{[ijk]} = \sum_{[ijk]} \tau^{i\,[jk]} + k^{-2} \mathrm{D}_i \omega^{[ijkl]},$$

(5) $$\sum_{[ijkl]} \mathrm{D}_i \sigma_{[jkl]} = \omega_{[ijkl]}.$$

Notons en vue de la suite la conséquence de (3)

(6) $$\mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ij} = \mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ji}$$

et celle de (4)

(7) $$\mathrm{D}_i \sigma^{[ijk]} = \mathrm{D}_i \tau^{i\,[jk]}.$$

2. Durand [6], opérant comme Franz avec l'équation du second ordre de Dirac, obtient 2 systèmes de 5 équations, qui sont aussi conséquences du formalisme de Kemmer. L'un d'entre eux exprime les 5 divergences en $i$ des tenseurs du type Gordon, en fonction du champ électromagnétique extérieur $\mathrm{H}_{ij} = \partial_i \mathrm{A}_j - \partial_j \mathrm{A}_i$. 2 de ces formules nous intéressent :

(8) $$\mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ij} \equiv \mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ji} = \mathrm{H}^{ik} j_k,$$

(9) $$\mathrm{D}_i \tau^{i\,[jk]} \equiv \mathrm{D}_i \sigma^{[ijk]} = \mathrm{H}^{jl} m^k_{,l} - \mathrm{H}^{kl} m^j_{,l};$$

la divergence du tenseur de Tetrode égale la densité de force de Lorentz, et celle de la densité de spin égale la densité de couple électromagnétique.

Donc, dans l'hypothèse $\mathrm{H}_{ij} \equiv 0$ (mais non nécessairement $\mathrm{A}_i \equiv 0$ : nous n'excluons pas l'effet Bohm-Aharonov) on a

(10) $$\mathrm{T}^{ij} = \mathrm{T}^{ji}; \qquad \mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ij} = 0; \qquad \mathrm{D}_i \tau^{i\,[jk]} = 0.$$

De plus, il résulte des (10) et de (2) que, $\mathrm{A}^{[jkl]}$ notant un tenseur arbitraire de divergence nulle,

$$\mathrm{D}^l \mathrm{T}^{kj} - \mathrm{D}^k \mathrm{T}^{lj} = k^2 \tau^{j\,[kl]} + \mathrm{A}^{[jkl]}, \qquad \mathrm{D}_j \mathrm{A}^{[jkl]} = 0,$$

$$0 = \sum_{[jkl]} [\mathrm{D}^l \mathrm{T}^{jk} - \mathrm{D}^k \mathrm{T}^{jl}] = k^2 \sum_{[jkl]} \tau^{j\,[kl]} + 3\,\mathrm{A}^{[jkl]},$$

et par conséquent

(11) $$k^2 \Big(\tau^{j\,[kl]} - (1/3) \sum_{[jkl]} \tau^{j\,[kl]}\Big) = \mathrm{D}^l \mathrm{T}^{kj} - \mathrm{D}^k \mathrm{T}^{lj}.$$

3. En l'absence de champ électromagnétique le tenseur d'impulsion-énergie est donc symétrique et conservatif, en sorte qu'on peut le coupler au champ gravitationnel d'Einstein *stricto sensu* — ce qu'on n'attendait pas d'une particule à spin.

$\mathrm{R}_{[ij]\,[kl]}$ notant le tenseur de Riemann, $\mathrm{T}_{ij} \equiv \mathrm{T}_{(ij)}$ la densité d'impulsion-énergie de la matière, $\mathrm{A}_{[jkl]}$ un tenseur de jauge de divergence nulle, l'équation de la gravitation d'Einstein

(12) $$\mathrm{D}_i \mathrm{R}^{ik} = \mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ik} - \frac{1}{2} \mathrm{D}^k \mathrm{T}$$

est conséquence des équations

(13) $$\mathrm{D}_i \mathrm{T}^{ik} = 0, \qquad \mathrm{D}_i \mathrm{A}^{[ijk]} = 0,$$

(14) $$\mathrm{D}_i \mathrm{R}^{[ij]\,[kl]} = \left[\mathrm{D}^l \mathrm{T}^{kj} - \mathrm{D}^k \mathrm{T}^{lj} + \frac{1}{2} g^{jl} \mathrm{D}^k \mathrm{T} - \frac{1}{2} g^{jk} \mathrm{D}^l \mathrm{T}\right] + \mathrm{A}^{[jkl]}.$$

De la formule de définition, analogue à (11),

$$\mathrm{S}^{j\,[kl]}-(1/3)\sum_{[jkl]}\mathrm{S}^{j\,[kl]}=\mathrm{D}^{l}\,\mathrm{T}^{kj}-\mathrm{D}^{k}\,\mathrm{T}^{lj} \tag{15}$$

on déduit

$$\mathrm{D}_{j}\,\mathrm{S}^{j\,[kl]}=0 \quad et \quad \mathrm{S}_{k}\equiv \mathrm{S}^{j}_{[jk]}=\partial_{k}\,\mathrm{T}, \tag{16}$$

en sorte que (14) se récrit

$$\mathrm{D}_{i}\,\mathrm{R}^{[ij]\,[kl]}=\left[\mathrm{S}^{j\,[kl]}-(1/3)\sum_{[jkl]}\mathrm{S}^{j\,[kl]}+\frac{1}{2}g^{jl}\,\mathrm{S}^{k}-\frac{1}{2}g^{jk}\,\mathrm{S}^{l}\right], \tag{17}$$

*une équation rectifiant l'équation erronée* (17) *de notre précédente Note* [1].

4. En rapprochant le système des équations (1) à (11) valables pour une particule de spin 0, 1/2 ou 1, et le système des équations (12) à (17) valables pour le champ de gravitation, on voit qu'on peut établir entre ces 2 champs un « couplage parfait » en posant

$$\mathrm{R}_{ij}=\left(\mathrm{T}_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{T}\,g_{ij}\right), \tag{18}$$

$$\mathrm{S}_{j\,[kl]}=k^{2}\,\tau_{j\,[kl]}. \tag{19}$$

La source des ondes gravitationnelles peut donc être exprimée soit en termes du « tenseur matériel » par l'équation (14), soit en termes de la « densité de spin de Durand » par l'équation (17) compte tenu de (19); dans ce cas, la masse propre $k$ de la particule de spin 0, 1/2 ou 1 figure explicitement.

5. Conclusions et remarques. — En corollaire au couplage précédemment décrit l'on a obtenu l'interprétation complète du système des 5 équations « mécaniques » de Franz [2], qui faisait défaut jusqu'ici.

La densité de masse propre T n'étant pas définie positive dans les cas de spin 1/2 et 1, les remarques de Bondi [7] sont à considérer.

Note reçue le 1er février 1988, acceptée le 16 mai 1988.

Références bibliographiques

[1] O. Costa de Beauregard, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 306, série II, 1988, p. 747-750.

[2] W. Franz, *Sitz. Math. Abt. Bayer. Akad.*, 3, 1935, p. 379.

[3] O. Costa de Beauregard, *J. Math. Pures et Appl.*, 22, 1943, p. 85-176. *Voir* p. 152-158, principalement équ. (61).

[4] G. Uhlenbeck et O. Laporte, *Phys. Rev.*, 37, 1931, p. 1152.

[5] H. Tetrode, *Zeits. Phys.*, 49, 1928, p. 858.

[6] E. Durand, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 218, 1944, p. 36-38.

[7] H. Bondi, *Rev. Mod. Phys.*, 29, 1957, p. 423.

*Institut Henri-Poincaré*, 11, *rue Pierre-et-Marie-Curie*, 75005 *Paris*.