Extrait de la *Revue des Questions scientifiques* du 20 janvier 1960

Equivalence entre le principe de l'entropie croissante et le principe des ondes retardées (1)

PAR

O. COSTA de BEAUREGARD
maître de recherches au C.N.R.S. (Paris)

1. Vers le début de ce siècle, une longue controverse « sans issue, mais très éclairante » opposa Ritz à Einstein (2), dont Wheeler et Feynman (3) écrivent que « Ritz voulait faire de l'exclusion des ondes avancées l'un des fondements du second principe de la thermodynamique, tandis qu'Einstein pensait que l'irréversibilité du rayonnement s'explique entièrement par des *arguments de probabilité* ».

Il est bien connu que la condition par excellence d'une discussion sans issue est réalisée quand les protagonistes sont substantiellement d'accord sans parvenir à l'expliciter. L'opinion de l'auteur de ces lignes est que l'unique raison ayant empêché

(1) L'expression *ondes retardées* s'entend en fait en deux sens différents. Celui qui nous intéresse ici s'oppose symétriquement à *ondes avancées*, indépendamment de toute référence aux conséquences de la covariance relativiste. En ce sens, la résolution du problème de Cauchy pour une certaine équation d'onde à partir de données posées à l'instant $t = 0$ sera *retardée* ou *avancée* suivant qu'elle est valable aux époques $t \geqslant 0$ ou $t \leqslant 0$. L'autre sens fréquent de l'expression *ondes retardées* n'implique en fait aucune référence à une flèche du temps : il se relie à la loi de propagation des signaux d'Einstein et au principe de Relativité restreinte. Afin d'éviter tout risque de malentendu, nous proposerions volontiers ici l'expression *propagation différée* des ondes covariantes relativistes, étant bien entendu que cette propagation différée peut être (conceptuellement) soit *retardée*, soit *avancée*.

(2) W. RITZ, *Ann. chimie et physique* **13**, 1908, p. 145; *Phys. Zeit.* **9**, 1908, p. 903; A. EINSTEIN, *Phys. Zeits.* **10**, 1909, p. 185. W. RITZ et A. EINSTEIN, *Phys. Zeits.* **10**, 1909, p. 323.

(3) *Rev. Mod. Phys.* **17**, 1945, p. 157.

Einstein et Ritz de tomber d'accord est que si, au temps où ils écrivaient, la quantification du rayonnement était déjà connue, par contre « l'ondulisation » de la mécanique restait encore à découvrir. Si Einstein et Ritz avaient pu soupçonner que, même dans les processus de mécanique statistique où aucune radiation (au sens classique du terme) ne semble intervenir, pourtant chaque diffusion mécanique de particules (qui est le phénomène de base de la mécanique statistique) implique essentiellement une diffusion d'ondes, alors bien certainement l'un et l'autre eussent convenu que la thèse et l'antithèse qu'ils défendaient respectivement avec tant d'acharnement sont échangeables et inséparables comme un théorème et sa réciproque.

La relation biunivoque entre les deux lois de l'entropie croissante et des ondes retardées a été rendue manifeste par Planck (4) dans le domaine de l'optique quantifiée. Planck (et déjà, sous forme fonctionnelle, Wien) a su définir le flux d'entropie attaché à un faisceau monochromatique; la constante h figure dans son expression, et l'on voit par là que la notion de photon est essentielle à la définition explicite de l'entropie du rayonnement.

Il résulte des formules de Planck que l'entropie croît lors de toute diffusion optique, même (et c'est le cas qui nous intéresse ici) sans changement de fréquence. C'est en cela que consiste la liaison biunivoque, dans le domaine optique, entre les deux lois d'irréversibilité qu'on a dites, car si l'on remplaçait conceptuellement le phénomène physique de la diffusion en cohérence de phases par le phénomène « anti-physique » d'une paradoxale *con-fusion en cohérence de phases*, c'est-à-dire très exactement si l'on remplaçait les ondes retardées par les ondes avancées qui leur sont temporellement symétriques, alors les formules de Planck feraient apparaître une diminution d'entropie symétrique à l'augmentation qu'on constate de fait.

(4) Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, 1re éd. 1906; 2e éd. 1913, etc. — Voir aussi A. Ore, *Phys. Rev.*, 98, 1955, p. 887.

L'on n'a peut-être pas assez remarqué que l'avènement de la mécanique ondulatoire, véritable théorie unitaire de la mécanique et de l'optique, de la matière et du rayonnement, basée sur le schème des ondes quantifiées, invite à voir dans ces résultats de Planck la manifestation d'une loi de portée universelle. Si, en effet, la mécanique ondulatoire vient supplanter la mécanique newtonienne en tant que mécanique universelle, c'est manifestement avec elle que doit être reconstruite la mécanique statistique des grands ensembles (5). Mais alors, dans la mesure même où la mécanique statistique classique se considérait détentrice de la définition universelle profonde de la notion d'entropie, la mécanique statistique nouvelle, utilisant la théorie des quanta, se trouvera établir à sa base même l'équivalence totale entre les deux principes de l'entropie croissante et de la retardation des ondes macroscopiques (6), l'un quelconque d'entre eux pouvant être déduit de l'autre.

2. Relation biunivoque entre la loi de l'entropie croissante et le principe des actions retardées en mécanique statistique classique

Ce que nous allons dire à présent s'applique également aux différentes versions classiques du *théorème* H; nous nous en sommes assuré dans des entretiens avec l'éminent spécialiste en ces questions qu'est Michel Loève, et c'est aussi ce que disent

(5) On sait que Pauli (Sommerfeld Festschrift, 1938, p. 30), J. von Neumann (*Zeits. Phys.* **57**, 1929, p. 30), Pauli et Fierz (*Zeits. Phys.* **106**, 1937, p. 572) se sont intéressés à ce problème, dont P. Bocchieri et A. Loinger ont repris récemment l'étude (*Phys. Rev.* **114**, 1959, p. 948).

(6) L'auteur de ces lignes incline fortement à penser qu'au niveau quantique individuel il n'y a objectivement ni retardation ni avance des ondes. Son opinion est que l'introduction en microphysique des propagateurs et des interactions du type dit « causal » se justifie essentiellement par des raisons implicites de statistique macroscopique. La discussion de ce point nous entraînerait ici trop loin; nous en avons dit un mot in Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta, Paris, Gauthier-Villars, 1957, pp. 125-130, et in *Cahiers de Physique*, n° 96, 1958, p. 323.

P. et T. Ehrenfest dans leur article classique (7). Toutefois, en raison de l'extrême importance de tout ceci pour la philosophie naturelle, et aussi de la nécessité de formuler des idées claires aux non-spécialistes, nous allons reprendre l'argument (qui nous est cher) des petites planètes de Poincaré (8).

Poincaré, pour simplifier le discours et les formules, suppose que les petites planètes décrivent une orbite circulaire commune et sont en nombre infini. Soient a le moyen mouvement, b la longitude initiale d'une petite planète, $f(a, b)$ la densité de distribution attachée au point a, b. Quelle que soit la fonction f supposée simplement continue en a, la fonction caractéristique

$$\mathrm{C}(t) \equiv \int\int e^{i(at+b)} f(a, b)\, da\, db$$

tend vers *zéro* quand $t \to +\infty$; ceci montre la tendance à l'étalement uniforme des petites planètes à partir de n'importe quelle configuration donnée initialement (9).

Mais si $t \to -\infty$, $\mathrm{C}(t) \to 0$ de la même manière que précédemment. Devrons-nous conclure de là que, par exemple, la grosse planète observée à l'instant *zéro* est née du rassemblement d'un essaim homogène de petites planètes existant dans un lointain passé ? Physiquement, nous savons bien que non. Mais il est manifeste que la réponse à ce paradoxe, tout comme celle au paradoxe parent (mais non identique) de Loschmidt, relève non de la technique, mais de l'épistémologie.

Avant d'achever la discussion du problème des petites planètes, faisons une brève digression dans un autre problème physique. Soit un gaz en équilibre thermique enfermé dans une enceinte comportant un piston qu'on pourra actionner. Supposons qu'entre les instants t_1 et t_2 l'on agisse vivement sur le piston, mais en le ramenant en t_2 à la position qu'il avait en t_1. Le fait est que la

(7) *Encykl. Math. Wiss.* 1914, 4, 2^{me} partie, II, n° 6.

(8) Calcul des probabilités, Paris, Gauthier-Villars, 1912, chap. 7, § 13; voir aussi *Le calcul des probabilités* in La Science et l'hypothèse, Paris, 1906.

(9) Il se trouve que l'image de C dans le plan complexe illustre à merveille la situation physique.

soit interne soit externe à la grosse planète, perturbation qui est supposée cesser à l'instant *zéro*. En bref il s'agit d'une *explosion*. Que si au contraire (et fort paradoxalement) les perturbations internes ou externes à la grosse planète faisaient sentir leurs effets avant d'avoir commencé et pas après avoir fini, alors on aurait affaire à une *implosion*; le théorème H devrait être appliqué en rétrodiction au lieu de l'être en prédiction; il fournirait une loi de décroissance de l'entropie avant l'instant final, au lieu de fournir une loi d'entropie croissante après l'instant initial.

En bref (et, répétons-le, cet argument est parent quoique différent de celui de Loschmidt) notre thèse est que le théorème H est de soi complètement symétrique entre prédiction et rétrodiction, entre avenir et passé. De lui-même il ne livre aucune flèche du temps. Pour qu'il le fasse, il faut l'assortir d'une *règle d'application*, elle-même liée à une *interprétation physique*; et c'est entièrement de celles-ci que procède en fin de compte la justification théorique de la flèche du temps.

La *règle d'application* est que le théorème H est par hypothèse applicable en prédiction, mais qu'il est interdit de l'appliquer tel quel (« aveuglément » ([11])) en rétrodiction.

Quant à l'*interprétation physique*, elle est contenue dans le discours qui précède. Elle revient à dire qu'*en fait le théorème* H *déduit la croissance de l'entropie du principe des actions retardées, lui-même conçu macroscopiquement*. Que si l'on admettait symétriquement un principe d'actions avancées, le théorème H déduirait pareillement une loi d'entropie décroissante. En raisonnant par l'absurde, il est d'ailleurs aisé de *déduire réciproquement la loi macroscopique des actions retardées du principe de l'entropie croissante*.

Mais, tout bien réfléchi, le détour par la mécanique quoique instructif, est superfétatoire, car le même problème fondamental se pose en calcul abstrait des probabilités. Celui-ci est

([11]) S. Watanabe, *Rev. Mod. Phys.* 27, 1955, p. 179.

par nature symétrique entre avenir et passé; c'est seulement l'introduction des probabilités *extrinsèques* de Bayes qui fait apparaître une dissymétrie entre prédiction et rétrodiction. *Que les probabilités de Bayes soient estimées extrinsèquement à la dynamique interne du système en étude prouve précisément qu'elles sont là pour traduire l'interaction de ce système avec le restant du monde; et le fait qu'elles soient utilisées dans les problèmes de rétrodiction et non dans les problèmes de prédiction prouve précisément que l'effet des actions extérieures est considéré comme retardé, et non comme avancé.*

Tout ceci étant dit, et bien qu'à notre avis l'épistémologie de la mécanique statistique classique (et même celle du calcul abstrait des probabilités) établisse de manière certaine une relation biunivoque entre les deux principes de l'entropie croissante et des actions retardées, il reste que dans ce cadre classique le principe des actions retardées reste curieusement métaphysique, et comme exsangue. Nous allons à présent lui donner corps et vie en substituant la mécanique ondulatoire à la mécanique newtonienne.

3. Relation biunivoque entre la loi de l'entropie croissante et le principe des ondes retardées en mécanique statistique ondulatoire

Pour la faire apparaître il suffit d'expliciter le contenu de certains résultats théoriques dûment établis; nous avons déjà cité à ce sujet la formule de Planck donnant le flux d'entropie associé à un faisceau monochromatique; et dans un instant nous produirons le résultat annoncé sous une forme très générale par une simple réinterprétation du célèbre théorème de J. von Neumann (12) relatif à l'irréversibilité de l'opération de mesure en mécanique quantique. L'épistémologue ayant le devoir de s'en

(12) Les fondements mathématiques de la mécanique quantique, Paris, Alcan, 1946, chap. 4 et 5.

tenir à des raisonnements aussi élémentaires que possible, nous allons commencer par mettre en évidence la relation physique intime entre la croissance de l'entropie et la retardation des ondes macroscopiques sur un exemple très parlant.

Soit par exemple une onde plane monochromatique (lumineuse ou matérielle) qui tombe sur un réseau; le phénomène de diffusion en cohérence de phases se traduit par l'émission d'un nombre fini g (facile à calculer) d'ondes planes émergentes. Du point de vue quantique, les quanta arrivant sur l'onde plane incidente (13) se répartissent entre les g ondes planes émergentes; c'est en cela précisément que consiste l'excitation du processus de la diffusion en cohérence de phases.

L'expérience montre que le phénomène reste inchangé si l'éclairement est assez faible pour que les quanta puissent être comptés un à un (14); la statistique à appliquer est donc la statistique classique des objets discernables, puisqu'en somme elle porte sur la répétition d'une expérience impliquant un appareillage macroscopique (15).

Supposons que l'expérience implique n quanta, c'est-à-dire qu'elle soit répétée n fois, avec $n \gg g$. La probabilité du jeu des nombres d'occupation n_i des g ondes planes émergentes (16) est donnée par une formule de statistique élémentaire, la formule des permutations avec répétitions, et l'on a

$$P(n_i) = n\,!/\pi(n_i\,!)$$

Le dénominateur augmente, et donc la probabilité P diminue,

(13) Dans le cas des ondes de fermions il faut explicitement considérer l'onde plane incidente au sens macroscopique comme un collectif d'ondes élémentaires.

(14) Bien entendu, du fait de la complémentarité entre phases et nombres d'occupation, le fait de compter les quanta sur les ondes émergentes interdit qu'on puisse faire interférer ces ondes à nouveau.

(15) Même argument chez J. von NEUMANN, *op. cit.*

(16) On simplifie le discours et la formule en supposant le réseau tel que les intensités des ondes émergentes soient toutes égales; le cas plus général se traite aisément.

si l'on prend un « corpuscule » dans une « case » pour le placer dans une « case » plus occupée : la probabilité P est donc maxima lorsque tous les n_i sont égaux (à $\Delta n = \pm 1$ près, puisque n est entier), ce qui est le résultat intuitif.

Il y a donc bien dans cette expérience augmentation de l'entropie par diffusion; et le fait même qu'il y ait *dif-fusion* est lié au caractère retardé des ondes macroscopiques.

Conceptuellement, l'on peut imaginer avoir affaire à des ondes avancées : il y aurait alors « con-fusion en cohérence de phases » de g ondes planes incidentes sur une seule onde plane émergente. Du point de vue quantique, les quanta arrivant sur les ondes incidentes se réuniraient sur une seule onde plane émergente, et la formule qu'on vient d'écrire traduirait une diminution d'entropie.

L'expérience de pensée qu'on vient de décrire n'est qu'un exemple « entre mille » qu'on pourrait semblablement donner. Elle établit indubitablement le résultat annoncé.

Pour terminer, faisons apparaître ce même résultat sous une forme extrêmement générale, corollaire du théorème d'irréversibilité de J. von Neumann ([12]) relatif à l'opération de mesure au niveau quantique.

J. von Neumann considère une transition quantique affectant tous les systèmes d'un collectif. Cette transition est caractérisée par deux systèmes orthogonaux complets d'ondes solutions, l'un initial φ_i, l'autre final ψ_j; soient c_{ij} les coefficients de la substitution linéaire $\varphi_i - \psi_j$; ils satisfont aux relations

$$\sum_i \overset{*}{c}_{ij}\, c_{ik} = \sum_i c_{ji}\, \overset{*}{c}_{ki} = \delta_{jk},$$

$$\delta_{jk} = 0 \text{ si } j \neq k, \qquad \delta_{jk} = 1 \text{ si } j = k,$$

en vertu même de la normalisation des ondes φ et ψ. Le collectif est caractérisé initialement par un jeu de poids statistiques p_i attachés aux φ_i et finalement par un jeu de poids q_j attachés aux ψ_j; $\Sigma p_i = \Sigma q_j = 1$.

Si par hypothèse les ondes sont retardées, c'est-à-dire si l'on résout le problème de Cauchy vers le futur, il suit des principes mêmes de la mécanique ondulatoire les relations

$$q_j = \Sigma \overset{*}{c_{ji}} c_{ji} p_i$$

et par conséquent, si l'on appelle P le plus grand des p et Q le plus grand des q,

$$Q \leqslant P.$$

C'est bien la tendance à l'homogénéité caractéristique d'une entropie croissante.

Symétriquement, si l'on raisonnait par ondes avancées, c'est-à-dire en résolvant le problème de Cauchy vers le passé, alors on trouverait $P \leqslant Q$: il y aurait diminution d'entropie, q.e.d.

4. Brève conclusion

Dans cette étude nous avons cherché à tirer la « quinte essence » d'un point important contenu dans des analyses épistémologiques antérieures (17). Nous renvoyons le lecteur à celles-ci pour replacer notre problème particulier d'aujourd'hui dans un plus vaste contexte. L'ensemble du problème est certes intéressant; l'aspect particulier que nous en avons présenté aujourd'hui nous semble important.

(17) *Revue des questions scientifiques*, 8, 1952, p. 171; *Revue de synthèse*, 5-6, 1957, p. 7; Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta, Paris, Gauthier-Villars, 1957, chap. XIII.