COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Par O. COSTA DE BEAUREGARD,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Formalisme covariant d'intégrales de Fourier, tridimensionnelles curvilignes pour la particule libre à spin, quadridimensionnelles pour la particule liée à spin. Définitions covariantes de l'orthogonalité, de la norme, etc. Relation avec la théorie de Schwinger-Feynman. Réponse à une objection ancienne de L. de Broglie [1].

I. — Introduction.

Nous réunissons ici, et nous systématisons, un certain nombre de Notes ou de Mémoires antérieurs. Il ressort des formules même que nous produisons que la symétrie et la covariance relativistes peuvent être introduites en Théorie des Quanta dès le niveau élémentaire de la théorie de la particule à spin non explicitement superquantifiée. Dans une autre partie de notre étude, publiée ailleurs [9], nous montrons que la prise en considération des statistiques quantiques est indispensable à la levée de certains paradoxes, en sorte que, finalement, la superquantification est aussi indispensable que le spin à la réconciliation complète de la Relativité et des Quanta. Quoi qu'il en soit, nos formules très simples, ici produites, viennent corroborer les beaux travaux de Tomonaga [18], Schwinger [16], [17], Dyson [11], Feynman [12], auxquels elles constituent en somme une introduction élémentaire.

Mais cette étude technique en appelle une autre, d'ordre épistémologique, dont le titre tout indiqué sera *Complémentarité et Relativité* [10]. Nous y discutons, notamment, en termes d'Univers de Minkowski, la célèbre expérience de pensée d'Einstein, Podolsky, Rosen, et quelques autres.

Finalement, nous croyons pouvoir affirmer que la réconciliation des formalismes de la Relativité restreinte, et de la Théorie des Quanta fondée sur la Complémentarité, est un fait absolument accompli.

II. — Particule libre à spin.

II. 1. **Transformations de Fourier covariantes** [7]. — Soient h et c les constantes universelles bien connues, k_λ la 4-fréquence d'une onde plane et p_λ l'impulsion-énergie du corpuscule associé, k_0 et cm_0 les longueurs de ces 4-vecteurs :

$$\left.\begin{array}{c} h\,k_\lambda = 2\pi p_\lambda, \qquad h\,k_0 = 2\pi c\,m_0, \\ (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{array}\right\} \tag{1}$$

L'équation de la particule de spin multiple de $\frac{h}{4\pi}$ est de la forme

$$\{\alpha_\lambda \partial^\lambda + k_0\}\,\psi(x) = 0, \tag{2}$$

et, quelle que soit l'algèbre des matrices α_λ, l'équation de Gordon

$$\{\partial_\lambda^\lambda - k_0^2\}\,\psi(x) = 0 \tag{3}$$

est conséquence de la théorie.

Avec Marcel Riesz [15], prenons le développement de Fourier du ψ sous la forme (1)

$$4\pi^2\psi(x) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^\lambda x_\lambda}\zeta(k)\,d^4x; \tag{4}$$

appliquant l'opérateur de Gordon, on voit que

$$\begin{array}{lll} \zeta(k) = 0 & \text{si} & k_\lambda k^\lambda \neq -k_0^2, \\ k_\lambda k^\lambda = -k_0^2 & \text{si} & \zeta(k) \neq 0. \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{H}$ désignant l'hyperboloïde à deux nappes du 4-espace k

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0 \tag{5}$$

et

$$i\,\delta v_\lambda = [\mathrm{d}k_\mu \mathrm{d}k_\nu \mathrm{d}k_\rho], \qquad k_\lambda \delta v = -k_0\,\delta v_\lambda \tag{6}$$

définissant le 4-vecteur élément de volume sur $\mathcal{H}$ (évidemment colinéaire à k_λ) ainsi que son module (positif par définition), le développement de Fourier le plus général du ψ peut être donné sous les deux formes équivalentes

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{3}{2}}\psi(x) &= -i\iiint_{\mathcal{H}} \alpha^\lambda \delta v_\lambda\, e^{ik^\nu x_\nu}\zeta(k) \\ &= \iiint_{\mathcal{H}} \delta v\, e^{ik^\nu x_\nu}\zeta(k); \end{aligned} \tag{7}$$

on passe d'une forme à l'autre au moyen de (6_2) et (2). Naturellement, la forme en k de (2) est

$$\{\alpha_\lambda k^\lambda - ik_0\}\,\zeta(k) = 0. \tag{8}$$

Je dis que la formule de Fourier covariante réciproque de (7) est

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta(k) = \frac{i}{2k_0}\iiint_{\mathcal{E}} \delta u_\mu\, \varepsilon(k)\, e^{-ik^\lambda x_\lambda}(ik^\mu + \partial^\mu)\,\psi(x), \tag{9}$$

où $\mathcal{E}$ désigne une hypersurface quelconque du genre espace de l'espace-temps (2), δu_μ son 4-vecteur

(1) Le début de cette étude s'inspire de Marcel Riesz [15], que nous généralisons sur les points qui nous intéressent.

(2) Nous préférons la notation $\mathcal{E}$ au σ de Tomonaga-

élément de volume ($i\delta u_4 > 0$), $\varepsilon(k)$ un commutateur de signe bien connu :

$$i\delta u_\lambda = [\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu \mathrm{d}x_\rho], \qquad \varepsilon(k) = \frac{\frac{k_4}{i}}{\left|\frac{k_4}{i}\right|}. \tag{10}$$

Prenant l'intégrale (9) sur deux $\mathcal{E}$ différentes, transformant la différence en intégrale quadruple, et tenant compte de l'équation de Gordon sous ses formes (3) et (5), il vient bien *zéro* [3] en vertu de

$$\begin{aligned}&\partial_\mu \{ \mathrm{e}^{-ik^\lambda x_\lambda}(ik^\mu + \partial^\mu)\psi(x) \}\\ &= \mathrm{e}^{-ik^\lambda x_\lambda}\{ k_\mu k^\mu - ik_\mu \partial^\mu + ik_\mu \partial^\mu + \partial^\mu_\mu \} \psi(x).\end{aligned}$$

Prenant alors pour $\mathcal{E}$ l'hyperplan $x_4 = 0$, et écrivant séparément le résultat pour les énergies positives et négatives, avec

$$\vec{k} = k_\alpha, \qquad \vec{x} = x_\alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \tag{11}$$

il vient

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_\pm(\vec{k}) = \pm \frac{1}{2k_0}\iiint \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{x}}(ik_4 + \partial_4)\psi(\vec{x}, 0). \tag{12}$$

Par ailleurs, faisant dans (6_2) $\lambda = 4$, il apparaît l'invariant relativiste bien connu de la théorie des champs

$$\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{ik_4} = \pm\frac{\delta v}{k_0}, \quad + \text{ sur } \mathcal{H}_+, \quad - \text{ sur } \mathcal{H}_-, \tag{13}$$

de sorte que l'on déduit de (7_2) les expressions suivantes pour les contributions à $\psi(\vec{x}, 0)$ des énergies positives et négatives

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\psi_\pm(\vec{x}, 0) = \pm k_0 \iiint \mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}.\vec{x}}\frac{\zeta_\pm(\vec{k})}{ik_4}, \tag{14}$$

ou, équivalemment,

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\partial_4\psi_\pm(\vec{x}, 0) = \pm k_0\iiint \mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}.\vec{x}}\zeta_\pm(\vec{k}). \tag{15}$$

D'après la théorie élémentaire des intégrales de Fourier. les réciproques des (14) et (15) sont

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_\pm(\vec{k}) &= \pm\frac{1}{k_0}\iiint \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}.\vec{x}}ik_4\psi_\pm(\vec{x}, 0)\\ &= \pm\frac{1}{k_0}\iiint \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}.\vec{x}}\partial_4\psi_\pm(\vec{x}, 0),\end{aligned} \tag{16}$$

et il s'ensuit bien (12) ci-dessus, si l'on remarque que toute composante plane à énergie positive du ψ est orthogonale (au sens ordinaire) à toute composante à énergie négative; il y aurait doute pour deux composantes de même $\vec{k}$, mais, comme cette égalité n'est que *relative*, on lève le doute en changeant de repère galiléen.

Schwinger, notamment par ce qu'elle laisse disponible l'habituelle notation de la densité de spin.

(3) Ce calcul, et la formule (9), rectifient ceux que nous avions initialement donnés [4], [6].

Dans (9) figure la dérivée normale sur $\mathcal{E}$ du $\psi(x)$: celà tient à ce que nous n'avons invoqué que l'équation du second ordre de Gordon. En faisant jouer l'équation du premier ordre de la particule à spin, on fera disparaître la dérivée normale, mais, en contre-partie, l'algèbre particulière des a_λ fera son apparition. Par exemple, en théorie de Dirac

$$\left.\begin{aligned}&\partial_\mu\psi = \{[\gamma_{\nu\mu}]\partial^\nu - k_0\gamma_\mu\}\psi,\\ &\gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\nu\mu} = \begin{cases}\gamma_\mu\gamma_\nu & \text{si } \mu \neq \nu,\\ 0 \text{ si } \mu = \nu\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

et, en théorie de Kemmer [13, éq. (6) et (62)].

$$\partial_\mu\psi = \{[\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu]\partial^\nu - k_0\beta_\mu\}\psi. \tag{18}$$

Portant dans (9) ces expressions de ∂_μ, intégrant par parties, et remarquant qu'en vertu de l'antisymétrie de la matrice [ ] ci-dessus, la partie « tout-intégrée » est effectivement la transformée d'une intégrale double prise sur le contour à l'infini de $\mathcal{E}$, intégrale qui est nulle sous les hypothèses habituelles concernant le comportement du ψ à l'infini spatial, il reste une intégrale où le déplacement de l'opérateur ∂^ν sur l'exponentielle donne de nouveaux termes en k^ν; réductions faites, il vient, en théorie de Dirac,

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_{\left(\frac{1}{2}\right)}(\vec{k})\\ &= \frac{i}{2k_0}\iiint_{\mathcal{E}} \delta u_\nu \varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{-ik^\lambda x_\lambda}\{(i\gamma_\mu k^\mu - k_0)\gamma^\nu\}\psi(x)\end{aligned} \tag{19}$$

et, en théorie de Kemmer,

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_{(1)}(k) = \frac{i}{2k_0}\iiint_{\mathcal{E}} &\delta u_\nu \varepsilon(k)\,\mathrm{e}^{-ik^\lambda x_\lambda}\\ &\times\{ik^\nu + ik_\mu[\beta^\mu\beta^\nu - \beta^\nu\beta^\mu] - k_0\beta^\nu\}\psi(x).\end{aligned} \tag{20}$$

Le lecteur pourra vérifier à nouveau qu'en prenant les intégrales (19) ou (20) sur deux $\mathcal{E}$ différentes, transformant la différence en intégrale quadruple. et faisant jouer cette fois l'équation du premier ordre de la particule à spin, il vient bien *zéro* : *le* $\zeta(k)$ *défini par* (9), (19) *ou* (20) *est indépendant de* $\mathcal{E}$.

Dans (19) et (20), la dérivée normale du ψ a disparu. A la place, il y a une combinaison linéaire des composantes du ψ.

II.2. **Égalité de Parseval covariante.** — Introduisant les *adjoints covariants* $\bar{\psi}$ et $\bar{\zeta}$ du ψ et du ζ, ainsi que la matrice β que sait définir toute théorie de particule à spin, telle que

$$\bar{\psi} = \psi^+\beta, \qquad \bar{\zeta} = \zeta^+\beta, \tag{21}$$

les adjointes relativistes de (2) et de (8) sont

$$\bar{\psi}(x)\{a_\lambda\overleftarrow{\partial^\lambda} - k_0\} = 0, \qquad \bar{\zeta}(k)\{a_\lambda k^\lambda - ik_0\} = 0; \tag{22}$$

(8) et (22_2) ont les conséquences

$$k_\lambda\bar{\zeta}_1\zeta_2 = ik_0\bar{\zeta}_1 a_\lambda\zeta_2, \qquad k^\lambda\bar{\zeta}_1 a_\lambda\zeta_2 = ik_0\bar{\zeta}_1\zeta_2, \tag{23}$$

qui montrent notamment que les 4-vecteurs de l'espace des k, k_λ et $\bar{\zeta}_1 a_\lambda \zeta_2$, sont colinéaires.

Je dis que la formule de Parseval covariante est ([4])

$$i \iiint_{\mathcal{S}} \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 \delta u_\lambda = i \iiint_{\mathcal{K}} \varepsilon(k) \bar{\zeta}_1 a^\lambda \zeta_2 \delta v_\lambda$$
$$= - \iiint_{\mathcal{K}} \varepsilon(k) \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \delta v; \tag{24}$$

on passe de la première à la seconde forme au moyen de (23_2) et (6_2). Compte tenu de l'équation de continuité

$$\partial_\lambda \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 = 0, \tag{25}$$

l'on voit que le premier membre est indépendant de $\mathcal{S}$, ce qui nous permet de le calculer en particulier sur l'hyperplan $x_4 = 0$. Par ailleurs, exprimant le troisième membre en tenant compte de (13), puis de (23_1) pour $\lambda = 4$, il vient (avec le même signe pour les deux nappes)

$$\iiint_{x_4=0} \bar{\psi}_1 a^4 \psi_2 \, \mathrm{d}^3 \vec{x} = - k_0 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}_1 \zeta_2}{i k_4} \mathrm{d}^3 \vec{k}$$
$$= - k_0^2 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}_1 a^4 \zeta_2}{k_4^2} \mathrm{d}^3 \vec{k}; \tag{26}$$

séparant, en vertu d'une précédente remarque, les parties à énergies positives et négatives du ψ, l'on peut écrire, le signe étant partout $+$ ou $-$,

$$\iiint_{x_4=0} \bar{\psi}^1_\pm a^4 \psi^2_\pm \, \mathrm{d}^3 \vec{x} = - k_0^2 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}^1_\pm a^4 \zeta^2_\pm}{k_4^2} \mathrm{d}^3 \vec{k}; \tag{27}$$

ceci est bien l'égalité de Parseval ordinaire associée aux transformations de Fourier ordinaires (14) et (16). c. q. f. d.

II.3. **Définition covariante de l'orthogonalité et de la normalisation** [2]. — Deux ψ ou deux ζ seront dits *orthogonaux au nouveau sens covariant* si l'intégrale (24) vaut *zéro*. Prenant

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi, \qquad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta,$$

(24) fournit la norme de chaque fonction d'un système orthonormal (normalisation en nombre de particules). Il suit de ce qui précède que l'ensemble des composantes planes à énergies (ou fréquences) positives et négatives forme un système orthogonal complet, au nouveau sens covariant, pour développer le ψ.

En théorie de Dirac, $\bar{\psi}\gamma^4\psi = \psi^+\psi$; il y a donc identité entre la nouvelle définition et la définition classique. Remarquons aussi qu'en théorie de Dirac le premier membre de (24) est défini positif, en sorte qu'au troisième membre $\bar{\zeta}\zeta$ est positif sur la nappe $\mathcal{K}_+$, négatif sur la nappe $\mathcal{K}_-$; nous retrouvons ainsi un résultat connu.

([4]) Cette formule rectifie, par le ε (k), celle que nous avions initialement donnée [4], [6].

En théorie des particules à spin supérieur à $\frac{h}{4\pi}$, l'intégrale (26_1) s'écrit

$$\iiint \psi_1^+ \beta a_4 \psi_2 \mathrm{d}^3 \vec{x};$$

ceci est bien connu, en ce qui concerne la normalisation tout au moins (normalisation en nombre de particules). Le premier membre de (24) n'est plus alors défini positif, en sorte qu'on ne peut rien dire touchant le signe de $\bar{\zeta}\zeta$ sur chaque nappe de $\mathcal{K}$. Par contre, il reste vrai que, *pour la normalisation en nombre de particules*, l'on ne change rien en permutant simultanément le signe du 4-vecteur k_λ d'une composante spectrale, et celui de son nombre d'occupation n_k.

Vérifions directement, sur la première intégrale (24), *qu'en permutant les indices* 1 *et* 2, *on passe au nombre complexe conjugué.* Les conjuguées des quatre composantes de δu_λ sont $\pm \delta u_\lambda$, $+$ si $\lambda = 1, 2, 3$, $-$ si $\lambda = 4$. En supposant, ce qui est toujours possible, les a^λ et β hermitiennes, les conjuguées des quatre composantes de $\psi_1^+ \beta a^\lambda \psi_2$ sont

$$\psi_2^+ a^\lambda \beta \psi_1 = \mp \psi_2^+ \beta a^\lambda \psi_1, \quad - \text{ si } \lambda = 1, 2, 3, \quad + \text{ si } \lambda = 4$$

(en théorie de Kemmer, *voir* [13], éq. (3′)). Finalement,

$$(i \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 \delta u_\lambda)^* = i \bar{\psi}_2 a^\lambda \psi_1 \delta u_\lambda. \tag{28}$$

c. q. f. d.

Ici, comme en d'autres questions similaires, *c'est donc essentiellement le jeu de la « matrice-tampon » β qui concilie les exigences des formalismes relativiste et quantique, et notamment les rôles des deux symboles i propres à chaque théorie.* Signalons que ce jeu de formules (ou d'autres très similaires) sont impliqués à plusieurs reprises dans Schwinger [16, éq. (1.51) et (2.27)].

II.4. **Fonction caractéristique de l'impulsion-énergie.** — Il est clair que, dans (24), l'intégrand des seconds membres est la *fonction de distribution de l'impulsion-énergie.* Posons alors

$$\zeta_1 = \zeta, \qquad \zeta_2 = e^{i k^\lambda y_\lambda} \zeta; \tag{29}$$

compte tenu de (7), (24) devient

$$i \iiint_{\mathcal{S}} \bar{\psi}(x) a^\lambda \psi(x+y) \delta u_\lambda = i \iiint_{\mathcal{K}} \varepsilon(k) e^{i k^\lambda x_\lambda} \bar{\zeta}\zeta \delta v, \tag{30}$$

et ceci montre, en vertu d'une définition bien connue du Calcul des Probabilités, que le premier membre de (30) est la *fonction caractéristique* de l'impulsion-énergie de la particule libre. Nous avions antérieurement déduit ce résultat autrement [5].

II.5. **Résolution du problème de Cauchy.** — Portant (9), (19) ou (20) dans (7), on résout le problème de Cauchy sous la forme

$$\psi(x) = \iiint_{\mathcal{S}'} S^\lambda (x - x') \psi(x') \delta u_\lambda (x'), \tag{31}$$

avec respectivement, pour la particule de spin quelconque, et $D(x)$ désignant la fonction de propagation de Stueckelberg (réelle, impaire, et nulle dans l'*ailleurs*)

$$S^{\lambda}(x) = \partial^{\lambda} D(x) + D(x)\partial^{\lambda},$$
$$D(x) = \frac{i}{2k_0(2\pi)^3} \iiint_{\mathcal{K}} \varepsilon(k)\, e^{ik^{\lambda}x_{\lambda}}\, \delta v, \qquad (32)$$

pour la particule de Dirac

$$S^{\lambda}_{(\frac{1}{2})}(x) = \{(\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\gamma^{\lambda}\}\, D(x), \qquad (33)$$

et pour la particule de Kemmer

$$S^{\lambda}_{(1)}(x) = \{\partial^{\lambda} + \partial_{\mu}[\beta^{\mu}\beta^{\lambda} - \beta^{\lambda}\beta^{\mu}] - k_0\beta^{\lambda}\}\, D(x). \qquad (34)$$

Avec la forme générale (32), impliquant seulement l'équation du second ordre de Gordon, la dérivée normale sur $\mathcal{E}'$ du ψ figure. Avec les formes spécialisées (33) ou (34), l'on a à la place une combinaison linéaire des composantes du ψ. (32) a été donnée par Schwinger pour le photon, et (33) pour l'électron [16, éq. (2.22), (2.23), (2.24)], [17, éq. (A.29)].

II.6. **Localisations patio-temporelle des particules.** — Le problème de la distribution des particules sur les états d'impulsion-énergie a été résolu aux paragraphes II.1 et II.2. L'introduction des fonctions de propagation $D(x-x')$ ou $S^{\lambda}(x-x')$ va nous permettre de traiter le problème *complémentaire* de leur localisation spatio-temporelle.

Imaginons que l'instant-point x de la formule (31) décrive une hypersurface arbitraire $\mathcal{E}$ du genre espace, ne coupant pas $\mathcal{E}'$, et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ soient pavées d'une infinité de petites cellules jointives; si l'on aime un langage imagé, disons que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ représentent, dans l'Univers de Minkowski, deux écrans tridimensionnels, chacun percé d'une petite ouverture (l'une des précédentes cellules) que franchit ou ne franchit pas la particule. En termes de théorie de la mesure quantique de Von Neumann, la particule répond ainsi « oui » ou « non » à la mesure $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}'$ assimilée à une question; idéalement, l'on dispose de deux jeux complets $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ d'écrans *complémentaires* (au sens de l'optique), ce qui permet de poser de toutes les manières possibles la double question « $\mathcal{E}'$ puis $\mathcal{E}$ », ou « $\mathcal{E}$ puis $\mathcal{E}'$ ».

Par (31), $\psi(x)$, considérée comme une variété attachée à $\mathcal{E}$, est développée sur le système des fonctions $S^{\lambda}(x-x')$, où x est considérée comme la variable et x', attachée à $\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}$, comme l'indice de numération. L'on voit sans peine que deux $S^{\lambda}(x)$ différentes, c'est-à-dire attachées à deux x' différents, sont orthogonales sur $\mathcal{E}$ au sens covariant du paragraphe II.3; il suffit pour celà d'exprimer l'intégrale curviligne en termes de sa projection à temps constant, et de noter la présence d'un facteur exponentiel oscillant à exposant non nul. Les coefficients du développement du $\psi(x)$ lié à $\mathcal{E}$ sont les $\psi(x')$ liés à $\mathcal{E}'$. Reste à voir si nous pouvons calculer ces coefficients par la formule habituelle dûment généralisée.

Commençons par le cas de l'électron de Dirac, où le formalisme est d'un maniement particulièrement aisé. Modifiant légèrement les notations, nous écrirons, avec Schwinger [16]

$$S_{(\frac{1}{2})}(x) = (\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\, D(x) \qquad (35)$$

et

$$\psi(x) = \iiint_{\mathcal{E}'} S(x-x')\,\gamma^{\lambda}\psi(x')\,\delta w_{\lambda}(x'), \qquad (36)$$

ce qui est une expression du type canonique (24). Réciproquement, nous aurons la même formule avec permutation de x et x', et substitution de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$, ou encore, en prenant l'expression conjuguée et multipliant à droite par γ^4,

$$\bar{\psi}(x') = \iiint_{\mathcal{E}} \delta w_{\lambda}(x)\,\bar{\psi}(x)\gamma^{\lambda} S(x-x'); \qquad (37)$$

ceci est exactement la formule classique pour le calcul des coefficients $\psi(x')$ du développement du $\psi(x)$ sur les fonctions $S(x-x')$, compte tenu de la généralisation des définitions impliquée dans la formule (24). Nous disposons donc d'un formalisme covariant relativiste, transposant textuellement le formalisme quantique habituel, qui nous permet de traiter le problème des mesures de localisation successives d'une particule, assimilées au franchissement d'un écran tridimensionnel du genre espace barrant tout l'espace-temps, et percé d'une petite ouverture arbitrairement découpée. Dans le franchissement ou le non-franchissement des écrans successifs (réponse *oui* ou *non* à la question posée), l'on assiste à la *réduction du paquet de probabilités*, bien connue. La différence essentielle avec le formalisme « à temps constant » de la classique Théorie des Quanta, est que les fonctions de propagation de Stueckelberg remplacent les $\delta(\vec{x})$: si une particule a été localisée dans une petite ouverture au franchissement d'un écran $\mathcal{E}$ (localisation tridimensionnelle, ou localisation de franchissement) elle est, dans l'Univers, attachée à la fonction de propagation $D(x)$ ayant son sommet au point moyen de l'ouverture, c'est-à-dire que toutes ses manifestations passées et futures sont contenues à l'intérieur du cône isotrope de sommet x (localisation 4-dimensionnelle).

Avec le formalisme de Kemmer, les formules seraient un peu plus compliquées. En particulier, les β^{λ} n'ayant pas d'inverses, on ne verrait pas un β^{λ} prendre la place du γ^{λ} dans les formules analogues à (36) et (37); par voie de conséquence, ceci impliquerait une légère extension aux définitions posées au paragraphe II.3, extension que nous laisserons ici de côté.

II.7. **Cas d'un écran du genre temps.** —

Nous avons déjà discuté cet intéressant problème [3], [7], et nous le faisons de manière plus complète dans un article à paraître [9]. Cette *expérience de pensée* constitue un moyen très parlant d'introduire l'interprétation des énergies négatives de Feynman. De plus, sa discussion montre que l'intervention de l'une ou l'autre des deux statistiques quantiques est indispensable pour écarter le paradoxe d'une *causalité rétrograde*, qui apparaîtrait sans celà; le paradoxe en question se trouve écarté par le trait, nouveau, des statistiques quantiques, qui est de faire intervenir symétriquement les nombres d'occupation de l'état initial et de l'état final. En résumé, l'on peut dire que l'usage des statistiques quantiques (ou, ce qui revient au même, de la *superquantification*) est un élément aussi nécessaire à la réconciliation de la Relativité et des Quanta que l'introduction du *spin*.

III. — Particule à spin liée.

III. 1. Transformations de Fourier covariantes [8]. — Considérons d'abord le cas, pratiquement si important, de la particule plongée dans un champ donné, invariant par translation du genre temps. Prenant pour repère le système propre du champ, il est classique de développer la solution générale $\psi(x)$ sur le système des fonctions propres de l'énergie totale

$$W = \frac{h}{2\pi i c} k_4 \qquad \left(t = \frac{1}{ic} x_4\right) \tag{38}$$

sous la forme

$$\left.\begin{aligned} i\sqrt{2\pi}\,\psi(x) &= \int \mathrm{d}k_4\,\rho(k_4)\,\psi\left(\vec{x}, k_4\right) e^{ik_4 x_4}, \\ \vec{x} &= x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

où nous avons introduit le facteur $\sqrt{2\pi}$ en vue de la suite.

Contrairement à sa première apparence, cette formule est covariante relativiste. — Introduisant, en effet, la transformation de Fourier

$$\left.\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{3}{2}}\psi\left(\vec{x}, k_4\right) &= \iiint_{k_4 = k_4^0} \mathrm{d}^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\eta\left(\vec{k}, k_4\right), \\ \iiint \mathrm{d}^3\vec{x}\,\psi_p^+\psi_p &= \iiint \mathrm{d}^3\vec{k}\,\eta_p^+\eta_p, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

où p désigne l'indice de spin, *essentiellement non sommé quand il est répété*, et posant

$$\zeta(k) = \rho(k_4)\,\eta\left(\vec{k}, k_4\right), \tag{41}$$

ainsi que

$$\left.\begin{aligned} i\delta\tau = \mathrm{d}^4 k, \qquad i\delta\omega = \mathrm{d}^4 x, \qquad k = k_\lambda \\ (\lambda = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

(39) devient (⁵)

$$4\pi^2\psi(x) = \iiiint e^{i(k^\lambda x_\lambda)}\zeta(k)\,\delta\tau. \tag{43}$$

L'intégrale de Fourier covariante (43) n'a de sens que si l'on définit sa norme, ce qui, en Mécanique ondulatoire, doit être fait dans l'espace abstrait des fonctions de carré sommable. Postulons donc, toujours *sans sommation sur p*, une valeur finie (non invariante relativiste) pour chaque intégrale

$$I_p = \iiiint \zeta_p^+\zeta_p\,\delta\tau = \iiiint \psi_p^+\psi_p\,\delta\omega; \tag{44}$$

(43) s'inverse alors suivant

$$4\pi^2\zeta(k) = \iiiint e^{-i(k^\lambda x_\lambda)}\psi(x)\,\delta\omega. \tag{45}$$

Ici, et dans ce qui suit, *nous devrons supposer essentiellement diagonale (et hermitienne) la matrice* β *telle que*

$$\bar{\psi} = \psi^+\beta, \qquad \bar{\zeta} = \zeta^+\beta$$

(elle l'est en fait dans tous les cas usuels); alors, des valeurs finies pour les (44) entraînent une valeur finie pour la norme invariante relativiste

$$\iiiint \bar{\psi}\psi\,\delta\omega = \iiiint \bar{\zeta}\zeta\,\delta\tau. \tag{46}$$

Remarquons en passant que les seconds membres de (43) et (46) ont précisément la forme qui, dans le cas limite où le champ imposé s'évanouit, vient en coïncidence avec ceux des (7_2) et (24_2), précédemment données pour la particule libre.

Maintenant se présente une difficulté heureusement aisée à surmonter. *Physiquement*, la norme n'est pas l'intégrale quadruple (46), mais (normalisation en nombre de particules) l'intégrale triple conservative, prise sur une $\mathcal{S}$ quelconque du genre espace

$$i\iiint_{\mathcal{S}} \bar{\psi}\,a^\lambda\psi\,\delta u_\lambda = n, \tag{47}$$

formule qui, en général, n'admet pas de transformée de Fourier covariante. Or, il est aisé de voir qu'une valeur finie de la norme physique (47) entraîne une valeur infinie de la norme mathématique (46), ce qui semble renverser toute notre argumentation.

Mais introduisons arbitrairement quatre $\mathcal{S}$ ordonnées dans le temps, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ arbitrairement loin dans le passé, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ arbitrairement loin dans le futur, et supposons qu'entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'une part, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ de l'autre, le champ imposé admette un terme additif imaginaire pur, non astreint à vérifier les équations différentielles du champ; par exemple, dans le cas d'un 4-potentiel électromagnétique, les A'_α seront imaginaires et A'_4 réelle, et le 4-vecteur iA'_α n'aura pas à vérifier les équations de

(⁵) Comparer avec Maurice Lévy [**14**, p. 149] qui, partant de (43), se ramène à une forme équivalente à (39).

Maxwell-Lorentz. De ce fait, le 4-courant $\bar{\psi} a^\lambda \psi$ ne sera plus conservatif entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ni entre $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$, et nous supposerons que le champ imaginaire est précisément tel que l'intégrale (47) tombe à *zéro* avant $\mathcal{E}_1$ et après $\mathcal{E}_4$. De la sorte, une valeur finie, entre $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$, de la norme physique (47) est compatible avec une valeur finie de la norme mathématique (46).

III.2. **Définition covariante de l'orthogonalité.** — Deux fonctions ψ ou ζ seront dites orthogonales au nouveau sens covariant si

$$\iiiint \bar{\psi}_1 \psi_2 \, \delta\omega = \iiiint \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \, \delta\tau = 0. \tag{48}$$

Je dis que le système des fonctions propres de l'énergie totale, qui est orthogonal et complet au sens classique, est aussi orthogonal et complet au nouveau sens covariant (48).

Remarquons d'abord que, dans le 4-espace k, chaque fonction propre de l'énergie $\zeta(k)$ n'est non nulle que dans une bande d'énergie k_4, $k_4 + \Delta k_4$ (cas du spectre continu) ou que sur une lame infiniment mince d'énergie k_4 (cas du spectre ponctuel). Soit dit en passant, ceci permet, *dans le cas présent*, d'inverser de manière covariante la formule conservative (47). Dans le 4-espace x, les transformées $\psi(x)$ de ces $\zeta(k)$ ont une intensité invariante par translation x_4; d'une manière imagée, l'on peut dire qu'elles ne sont non nulles qûe dans des tubes indéfinis du genre temps. Chacune des précédentes cellules d'extension en phase, formée d'une bande horizontale du 4-espace k et d'un tube vertical du 4-espace x, est occupé par n particules; mais, de même qu'au paragraphe II.6, il serait *tout à fait erroné* de dire qu'il y a *à l'instant t n* particules dans chaque cellule. Chaque particule franchit l'instant t du temps macroscopique *et c'est tout*, sans qu'on puisse aucunement lui attribuer, dans cet acte, l'instant t, qui est absolument inobservable (du fait que nous parlons des valeurs de l'énergie). Les quatre relations d'incertitude sont impliquées à la fois dans le formalisme des intégrales de Fourier (43), (45) et (46); la normalisation physique liée à la formule (47) ne signifie aucunement que les particules peuvent être saisies sur l'hypersurface $\mathcal{E}$, mais simplement qu'elles franchissent cette hypersurface du genre espace, quelle qu'elle soit.

Ceci étant, il est clair que deux fonctions propres de l'énergie liées à des valeurs différentes de W sont orthogonales au nouveau sens (48) (du fait du facteur exponentiel en $i\Delta w.t$). Soient donc deux ζ liés à une même valeur propre multiple W du spectre ponctuel. *Puisque* β *est supposée diagonale*, deux composantes différentes ζ_p et ζ_q d'un ζ quelconque sont orthogonales au nouveau sens covariant. Soient donc deux $\zeta(k)$ différents liés au même système de valeurs W et p : ils seront orthogonaux au nouveau sens suivant (49_1) qui, *puisque* β *est diagonale*, équivaut au sens traditionnel (49_2)

C. Q. F. D.

$$\iiiint_{k_4-\varepsilon}^{k_4+\varepsilon} \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \, \delta\tau = 0, \qquad \iiint_{k_4=k_4^0} \bar{\zeta}_{1p} \zeta_{2p} = 0 \tag{49}$$

(nous avons supposé que k_4 n'est pas un point d'accumulation du spectre ponctuel). Dans le cas particulier du champ de force central, les transformés $\psi(x)$ des précédents $\zeta(k)$ sont bien connus : ils sont des produits d'un même facteur radial $f(r)$ par différentes fonctions de Laplace $Y_m^l(\theta, \varphi)$, qui forment bien un système orthogonal complet.

Je dis maintenant que, dans le 4-espace k, les précédentes bandes et lames d'énergie sont symétriques par rapport à l'origine des k. En effet, l'électron lié, par exemple, est équivalent à un positon lié à énergie cinétique négative, donc à une particule à énergie totale négative. Ceci se voit aussi en se reportant à la formule du spectre de l'atome hydrogénoïde, qui comporte un radical; en considérant les deux signes du radical, on retombe sur ce qui vient d'être dit. Mais, naturellement, il serait tout à fait erroné d'imaginer des transitions entre niveaux d'énergie de signes contraires; deux niveaux symétriques sont deux représentations possibles d'un même état physique; dans la normalisation en nombre de particules, c'est seulement la somme des nombres d'occupation correspondants qui a un sens. Comme pour la particule libre, l'énergie négative est une fiction formelle suggérée par le formalisme quantique. Macroscopiquement parlant, il n'y a que des énergies positives.

III.3. **Passage à la superquantification. Représentation de Heisenberg et représentation d'interaction. Cas d'un champ imposé variable quelconque.** — Tout comme la formule (7) du paragraphe II, la formule (43) ci-dessus peut être portée directement dans le formalisme de Feynman [12]; on obtient ainsi la matrice de l'émission-absorption dipolaire, de l'effet photo-électrique direct ou inverse, etc. Ici, le champ d'interaction induisant des transitions entre états libres ou liés de l'électron, entre états libres du photon, est le champ d'interaction entre l'électron et le photon libre.

Schwinger [16], en théorie superquantifiée, a tiré au clair les rapports entre la représentation covariante de Heisenberg, et la nouvelle représentation covariante d'interaction. *La représentation de Heisenberg est une représentation sans évolution*, où la fonction de répartition est invariable, et où les équations d'onde des particules sont les équations avec champ imposé; ceci exige un formalisme d'intégrales quadruples, comme on l'a vu au paragraphe III.2 précédent, et, par voie de conséquence, à nouveau l'exclusion de toute idée d'évolution [1]. Au contraire, *la représentation d'interaction est une représentation avec évolution*, où le champ ne figure plus dans les équations d'onde des particules, mais induit des transitions entre états séparés de ces particules qu'elle met en rapport.

Prenons un exemple. Soit un atome initialement et finalement libre, mais qui, entre temps, subit l'action d'un champ électromagnétique extérieur variable. Si l'on traite l'action de ce champ en représentation d'interaction, il y a, entre l'état initial et l'état final, variation des poids statistiques des diverses valeurs des nombres d'occupation des états stationnaires de l'atome. Ceci est une description avec évolution [1].

Si, au contraire, on introduit le champ extérieur variable, à côté du champ du noyau, dans l'équation d'onde de l'électron, ce qui (même si l'on n'introduit pas explicitement la fonction de répartition invariable) revient à se placer en représentation de Heisenberg, alors on aura affaire à une généralisation simultanée des effets Stark et Zeeman (par la présence simultanée des deux champs, électrique et magnétique, et par leur variation temporelle); en parlant ainsi, nous avons supposé que le champ externe reste assez petit pour pouvoir être considéré comme une perturbation du champ du noyau, faute de quoi l'on ne pourrait plus parler de niveaux d'énergie, et il s'agirait d'un tout autre problème, dont nous dirons un mot dans un instant. Ceci est une description spatialisée sans évolution, impliquant symétriquement les quatre relations d'incertitude par le jeu des formules du paragraphe III.1.

Maintenant, nous pouvons nous affranchir de la restriction adoptée au début du paragraphe III.1.

Appelons *état lié au sens large* toute solution de l'équation d'onde avec champ imposé quelconque (arbitrairement variable). Tout le formalisme d'intégrales covariantes quadruples du paragraphe III.1 s'applique à ce cas général, y compris notamment la définition (48) de l'orthogonalité. Remarquons que *l'opérateur d'ondes est self-adjoint au sens impliqué par ces définitions*, car on a, par exemple dans le cas avec 4-potentiel A^λ, et compte tenu du terme additif imaginaire que nous avons introduit au paragraphe III.1,

$$\left.\begin{aligned} \left\{ \alpha_\lambda \left(\overrightarrow{\partial^\lambda} + \mathrm{A}'^\lambda + i\mathrm{A}^\lambda \right) + k_0 \right\} \psi &= 0, \\ \bar{\psi} \left\{ \alpha_\lambda \left(\overleftarrow{\partial^\lambda} + \mathrm{A}'^\lambda - i\mathrm{A}^\lambda \right) - k_0 \right\} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

d'où, l'intégrale étant étendue à tout l'Univers,

$$\begin{aligned} &\iiiint \left(\overrightarrow{\partial^\lambda} + 2\,\mathrm{A}'^\lambda \right) \bar{\psi} \alpha_\lambda \psi \,\delta\omega \\ &\quad = \iiint_{\mathcal{S}_{+\infty}} \bar{\psi} \alpha_\lambda \psi \,\delta u^\lambda - \iiint_{\mathcal{S}_{-\infty}} \bar{\psi} \alpha_\lambda \psi \,\delta u^\lambda \\ &\qquad + 2 \iiiint \mathrm{A}'^\lambda \bar{\psi} \alpha_\lambda \psi \,\delta\omega; \end{aligned} \tag{51}$$

mais (*cf.* § III.1) les trois dernières intégrales sont simultanément nulles. Récrivant alors les (50) sous la forme

$$| D\psi \rangle = k_0 \psi, \qquad k_0 \bar{\psi} = \langle \psi D |, \tag{52}$$

il résulte de (51) que

$$\langle \psi | D\psi \rangle = \langle \psi D | \psi \rangle, \tag{53}$$

avec par définition

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \iiiint \bar{\psi}_1 \psi_2 \,\delta\omega. \tag{54}$$

C. Q. F. D.

Le terme réel de masse propre k_0 peut être considéré comme une valeur propre multiple de l'opérateur D, self-adjoint (au sens précédent), les solutions orthogonales (au nouveau sens) de l'équation d'onde étant les fonctions propres correspondantes.

Ceci conduit à la *description minkowskienne spatialisée* d'une particule soumise à toute l'évolution spatio-temporelle d'un champ donné. Si l'on veut revenir à une description avec évolution, il suffit de transformer tout ou partie du champ imposé en terme d'interaction, et de se ramener, avec Schwinger [16], totalement ou partiellement, en *représentation d'interaction*.

Manuscrit reçu le 19 mai 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DE BROGLIE L. — L'électron magnétique, Paris, 1934, p. 301-307.
[2] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 626.
[3] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 724.
[4] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 804.
[5] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 182.
[6] COSTA DE BEAUREGARD O. — Particules fondamentales et noyaux. *Colloques internationaux du C.N.R.S.*, Paris, 1953, p. 207-216.
[7] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1495.
[8] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 50 et 1196.
[9] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Revista Mexicana de Fisica* (sous presse).
[10] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Revue Philosophique* (sous presse).
[11] DYSON F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486-502.
[12] FEYNMAN R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.
[13] KEMMER N. — *Proc. Roy. Soc.*, 1939, A **173**, 91-116.
[14] LÉVY M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1950, A **204**, 149.
[15] RIESZ M. — Actes du 10ᵉ Congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, p. 123-131.
[16] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439-1461.
[17] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 651-679.
[18] TOMONAGA S. I. — *Prog. Theor. Phys.*, 1946, **1**, 27.