COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Par O. COSTA DE BEAUREGARD,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Formulation covariante relativiste des intégrales de Fourier réciproques, de l'égalité de Parseval, de la norme et de l'orthogonalité, de la résolution du problème de Cauchy pour la particule libre, sans spin et avec spin, au moyen d'intégrales triples curvilignes. Problèmes analogues pour la particule liée, impliquant en général des intégrales quadruples. Relation avec la théorie de Schwinger-Feynman, et réponse à une objection ancienne de L. de Broglie.

I. — Introduction.

Un exposé a déjà paru sous ce même titre ici-même [6], mais, depuis, nous avons complété et amélioré la présentation de notre théorie [7]; ceci justifie un nouvel exposé complet de la question.

Rappelons que nous tenons notre point de départ de Marcel Riesz [16]. Dans des travaux en cours de publication [15'], M. R. Potier adapte les présentes idées à sa théorie générale des particules à spin à masses multiples [15].

II. — Notations.

Soient $\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$, les indices d'Univers, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ les indices d'espace; x ou x_λ ($x_4 = ict$), etc., désigneront des quadrivecteurs, $\mathbf{x}$ ou x_α, etc., des vecteurs de l'espace ordinaire. Comme d'habitude, k_λ sera la quadrifréquence d'une onde plane, k_0 (réel) la longueur de k_λ, reliées à l'impulsion-énergie et à la masse propre du point matériel porté par l'onde par les formules universelles de L. de Broglie,

$$hk_\lambda = 2\pi p_\lambda, \qquad hk_0 = 2\pi c m_0; \tag{1}$$

la fréquence proprement dite et l'énergie seront alors

$$\nu = -\frac{ic}{2\pi} k_4, \qquad W = -icp_4 = -\frac{ich}{2\pi} k_4. \tag{2}$$

Nous voulons mettre en évidence l'invariance de notre théorie non seulement vis-à-vis des rotations de Lorentz (« transformations orthochrones »), mais aussi vis-à-vis des réflexions de l'un quelconque des axes d'Univers, et particulièrement de l'axe de temps. Dans la définition, classique, du tenseur dual d'un tenseur complètement antisymétrique figure un coefficient arbitraire, incluant évidemment un signe arbitraire. Nous trouvons commode d'adopter la *convention* suivante : si l'on fait une réflexion de l'un quelconque des axes, le signe précédent, choisi arbitrairement au départ, sera changé. L'avantage de cette *convention* est que la relation mutuelle de deux tenseurs duals est, *à un arbitraire initial près*, indépendante du référentiel, ou intrinsèque. Il suit de là, en particulier, que l'orientation de la normale à une hypersurface tridimensionnelle d'Univers sera définie indépendamment des orientations des axes.

Introduisons l'hyperboloïde à deux nappes du 4-espace k,

$$\eta(k) \equiv k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0, \tag{3}$$

dont le quadrivecteur élément de volume, et la longueur (réelle) de celui-ci, sont respectivement définis suivant

$$d\eta_\lambda = -i[dx_\mu\, dx_\nu\, dx_\rho], \qquad k_\lambda\, d\eta = -k_0\, d\eta_\lambda; \tag{4}$$

$d\eta_\lambda$ est évidemment colinéaire au k_λ aboutissant au même point d'Univers, et nous conviendrons que $d\eta_\lambda$ dirige la normale entrante dans l'hyperboloïde :

$$k_\lambda\, d\eta^\lambda > 0, \qquad k_0 > 0, \qquad d\eta > 0. \tag{5}$$

Soit encore $\varepsilon(k)$ une fonction de point d'Univers valant $+1$ sur l'une des nappes, η_+, de η et -1 sur l'autre nappe, η_-. Si l'on se limite au sous-groupe des rotations de Lorentz, on peut toujours supposer que η_+ et η_- sont respectivement les nappes des fréquences (ou des énergies) positives et négatives. D'une façon générale, nous avons posé par définition

$$\varepsilon(k) = \left\{ \begin{array}{rl} +1 & \text{sur l'une des nappes, } \eta_+, \text{ de } \eta, \\ -1 & \text{sur l'autre nappe, } \eta_-, \text{ de } \eta, \\ 0 & \text{en dehors de } \eta. \end{array} \right\} \tag{6}$$

Enfin, définissons la fonction

$$\begin{aligned} e(kx) &= e^*(-kx) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 2(\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ik^\lambda x_\lambda} & \text{si } k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0, \\ 0 & \text{si } k_\lambda k^\lambda + k_0^2 \neq 0. \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

Dans l'espace-temps, nous considérons une famille continue arbitraire d'hypersurfaces du genre espace σ, d'élément trilinéaire

$$d\sigma_\lambda = -i[dx_\mu\, dx_\nu\, dx_\rho]; \tag{8}$$

si l'on se limite au sous-groupe orthochrone où la flèche du temps macroscopique a le sens habituel, on peut toujours supposer que $-i\, d\sigma_4$ est négatif; c'est la convention habituelle, grâce à laquelle, par exemple, la charge électrique, définie comme un hyperflux $\iiint_\sigma j^\lambda\, d\sigma_\lambda$, a le même signe que la densité de charge. Si l'on accepte les réflexions de l'axe de temps, l'intégrale précédente sera toujours, avec nos conventions, un vrai scalaire, j^λ et $d\sigma_\lambda$ de vrais quadrivecteurs, en sorte que la charge et la densité de charge n'auront pas essentiellement le même signe.

Comme d'habitude, nous considérerons le $\psi(x)$ ou le $\zeta(k)$ à plusieurs composantes d'une particule à spin comme une matrice-colonne, son adjoint ψ^+ ou ζ^+ comme une matrice ligne. Toute théorie de particule à spin introduit une matrice carrée β hermitienne, invariante dans les rotations orthochrones, et changeant de signe dans une réflexion de l'axe de temps, telle que

$$\overline{\psi} = \psi^+\beta, \qquad \overline{\zeta} = \zeta^+\beta, \tag{9}$$

soient les *adjoints relativistes* bien connus, du ψ et du ζ. Pour une solution scalaire de l'équation des ondes, nous aurons simplement

$$\overline{\psi} = \psi^*, \qquad \overline{\zeta} = \zeta^*. \tag{10}$$

Il nous sera commode de définir l'opérateur du courant de Gordon,

$$[\partial^\lambda] = \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} - \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda}, \tag{11}$$

différence entre les opérateurs différentiels partiels agissant vers la droite et vers la gauche. L'opérateur dalembertien sera désigné par ∂^2_λ.

Naturellement, la convention de sommation sur indices tensoriels muets sera utilisée. Mais il n'y aura pas de sommation sur l'indice de spin j chaque fois que celui-ci sera explicitement écrit. Cette sommation, au contraire, sera automatique dans les produits de matrices.

III. — Particule libre de spin non spécifié obéissant à l'équation de Gordon.

III. 1. Intégrales de Fourier réciproques covariantes.

— L'équation de Gordon

$$(\partial^2_\lambda - k_0^2)\,\psi(x) = 0 \tag{12}$$

prend, dans le 4-espace k, la forme

$$(k_\lambda k^\lambda + k_0^2)\,\zeta(k) = 0; \tag{13}$$

pour le voir, on suppose le ψ développé en intégrale de Fourier quadruple, et l'on applique aux deux membres l'opérateur $\partial^2_\lambda - k_0^2$, ce qui conduit au dilemme

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta(k) = 0. \tag{14}$$

L'intégrale considérée se réduit donc à une intégrale simple étendue aux deux nappes de l'hyperboloïde (3), et nous l'écrivons

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta} e^{ik^\lambda x_\lambda}\zeta(k)\,\varepsilon(k)\, d\eta, \tag{15}$$

le $\varepsilon(k)$ étant introduit pour l'élégance des formules à venir. Séparant les contributions à ψ des nappes η_+ et η_-, nous pouvons décomposer (15) en les deux intégrales

$$\psi_\pm(x) = \pm(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{\eta} e^{ik^\lambda_\pm x_\lambda}\zeta_\pm(k)\, d\eta, \tag{16}$$

le signe étant $+$ ou $-$ partout, avec

$$\psi = \psi_+ + \psi_-. \tag{17}$$

Montrons que, σ désignant une hypersurface quelconque du genre espace, et k_λ satisfaisant à (3), l'intégrale de Fourier covariante réciproque de (15) est

$$\zeta(k) = -\frac{i}{2k_0}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_\sigma e^{-ik^\lambda x_\lambda}[\partial^\mu]\,\psi(x)\, d\sigma_\mu, \tag{18}$$

ou bien les deux intégrales de Fourier réciproques des (16) les

$$\zeta_\pm(k) = -\frac{i}{2k_0}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_\sigma e^{-ik^\lambda_\pm x_\lambda}[\partial^\mu]\,\psi_\pm(x)\, d\sigma_\mu, \tag{19}$$

le signe étant $+$ ou $-$ partout; l'équivalence entre (18) et les (19) sera démontrée dans un instant; (18) et les (19) sont, comme il le fallait, indépendantes de σ, en vertu de l'équation de continuité du courant de Gordon ($e^{-ik^\lambda x_\lambda}$ est solution de l'équation de Gordon) et des hypothèses habituelles sur le comportement du ψ à l'infini spatial.

Chacune des (16) se transforme en intégrale étendue à l'hyperplan $k_4 = 0$: chaque $\mathbf{k}$ est la projection d'un seul k_λ, et la formule (4_2) écrite pour $\lambda = 4$ donne

$$\frac{d\mathbf{k}^3}{ik_4} = -\varepsilon(k)\frac{d\eta}{k_0} \tag{20}$$

(ce qui est un invariant bien connu de la théorie des champs). Ainsi, les deux intégrales (16) deviennent (avec $x_4 = 0$)

$$\psi_\pm(\mathbf{x}, 0) = -k_0(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\frac{\zeta_\pm(\mathbf{k})}{ik_4}\, d\mathbf{k}^3, \tag{21}$$

ou, équivalemment,

$$\partial_4\psi_\pm(\mathbf{x}, 0) = -k_0(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\zeta_\pm(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}^3. \tag{22}$$

Par ailleurs, les intégrales conservatives (19) peuvent être prises sur l'hyperplan $x_4 = 0$, et il vient bien ainsi la demi-somme des réciproques ordinaires des (21) et (22) :

$$\zeta_\pm(\mathbf{k}) = -\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2k_0} \iiint e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} (ik_4 + \partial_4)\, \psi_\pm(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x}^3. \quad (23)$$

Reste à montrer l'équivalence de (18) et des (19) : il suffit pour cela de les calculer sur un hyperplan $x_4 = \text{const.}$, et de remplacer $\psi(x)$ par $\zeta\, e^{ik'^\lambda x_\lambda}$: il vient alors *zéro*, comme d'habitude en théorie de Fourier, si $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ (¹) et, si $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, $k'_4 = -k_4$, il vient encore *zéro* du fait du jeu de l'opérateur $[\partial_4]$. Anticipant légèrement sur la suite, nous pouvons dire que deux ondes planes différentes quelconques satisfaisant à la condition (3) sont orthogonales entre elles au sens des précédentes formules covariantes.

III.2. Normalisation mathématique. Conditions de convergence en norme L_2 des formules précédentes.

— Soit toujours ψ ou ζ une solution de l'équation de Gordon (12) ou (13), et désignons par ψ^j ou ζ^j ($j = 1, 2, \ldots, r$) les composantes du spineur ψ ou ζ. Montrons que les deux égalités de Parseval covariantes associées aux paires d'intégrales réciproques (16) et (19) sont, le signe étant + ou — partout (et sans sommation sur j)

$$N_\pm^j = -\frac{i}{2k_0} \iiint_\sigma \psi_\pm^{*j} [\partial^\lambda]\, \psi_\pm^j\, d\sigma_\lambda = \pm \iiint_\eta \zeta_\pm^{*j} \zeta_\pm^j\, d\eta; \quad (24)$$

du fait de l'équation de continuité du courant de Gordon, les premiers membres de N^j sont bien indépendants de σ. Ceci étant, la démonstration de la formule (24) est semblable à celle précédemment donnée : les premiers membres, conservatifs, se calculent sur l'hyperplan $x_4 = 0$; par la formule (20), les seconds membres se transforment en intégrales étendues à l'hyperplan $k_4 = 0$, et il vient ainsi les égalités de Parseval ordinaires, associées aux intégrales de Fourier ordinaires (21) et (22) ou (23),

$$N^j = \frac{1}{2k_0^2} \iiint \psi_\pm^{*j} [\partial_4]\, \psi_\pm^j\, d\mathbf{x}^3 = \iiint \frac{1}{ik_4} \zeta_\pm^{*j} \zeta_\pm^j\, d\mathbf{k}^3. \quad (25)$$

Ceci étant, nous assurerons l'appartenance du ζ et du ψ à l'espace de Hilbert en imposant aux $2r$ nombres réels $N_\pm^j$ d'être bornés; d'après les formes de leurs seconds membres, les r nombres N_+^j sont définis positifs, et les r nombres N_-^j définis négatifs. De la sorte, les $\zeta_+^j(k)$ et les $\psi_+^j(x)$ d'une part, les $\zeta_-^j(k)$ et les $\psi_-^j(x)$ d'autre part, appartiendront à l'espace de Hilbert, puisqu'ils auront une norme quadratique finie et définie en signe.

Voici une remarque incidente : si un ψ^j est réel, on voit aisément que le N^j correspondant est nul. La conclusion est que, dans la présente théorie, un ψ réel ne peut pas être développé sur le système des seules ondes planes à énergies positives ou à énergies négatives; un corpuscule à ψ réel doit être un corpuscule « racémique » contenant un mélange à poids égaux d'ondes planes ζ_+ et d'ondes planes ζ_-; du reste, on vérifie directement, dans ce cas, la formule

$$\zeta^{*j}(k)\, \zeta^j(k) = \zeta^{*j}(-k)\, \zeta^j(-k). \quad (26)$$

III.3. Égalités de Parseval covariantes (*suite*). Normalisation physique et orthogonalité des ondes ζ ou ψ.

— Introduisant maintenant la définition (9) des $\bar{\psi}$ et $\bar{\zeta}$, ainsi que la sommation automatique sur l'indice j impliquée dans les produits de matrices, et ψ^a et ψ^b désignant maintenant deux solutions différentes de l'équation de Gordon, l'on démontre, de même que précédemment, la double formule

$$-\frac{i}{2k_0} \iiint_\sigma \bar{\psi}_\pm^a [\partial^\lambda]\, \psi_\pm^b\, d\sigma_\lambda = \pm \iiint_\eta \bar{\zeta}_\pm^a \zeta_\pm^b\, d\eta, \quad (27)$$

puis, en réitérant l'argument consécutif à la formule (23),

$$-\frac{i}{2k_0} \iiint_\sigma \bar{\psi}^a [\partial^\lambda]\, \psi^b\, d\sigma_\lambda = \iiint_\eta \bar{\zeta}^a \zeta^b \varepsilon(k)\, d\eta. \quad (28)$$

Deux solutions ψ ou ζ de l'équation de Gordon seront dites orthogonales au nouveau sens covariant si leur produit scalaire hermitien (28) est nul.

En faisant, dans (28),

$$\psi^a = \psi^b = \psi, \qquad \zeta^a = \zeta^b = \zeta,$$

nous obtenons la *norme physique* ou *nombre d'occupation* n (réel, positif ou négatif) de l'onde ψ ou ζ

$$n = -\frac{i}{2k_0} \iiint_\sigma \bar{\psi} [\partial^\lambda]\, \psi\, d\sigma_\lambda = \iiint_\eta \bar{\zeta} \zeta \varepsilon(k)\, d\eta. \quad (29)$$

Voici, avant de changer de sujet, quelques remarques.

Cas du ψ scalaire. — Le nombre d'occupation n est la différence entre deux nombres positifs, respectivement attachés aux nappes η_+ et η_- de η. En se limitant aux rotations du quadrèdre lorentzien, l'on peut donc énoncer que la norme physique d'une onde plane ou, plus généralement, d'un ζ_+ ou d'un ζ_- a le même signe que l'énergie (ou les énergies).

Si le ψ scalaire est, de plus, réel, on vérifie aisément que le produit scalaire hermitien (28) de deux tels ψ est imaginaire pur, ce qui permet de retrouver le résultat de la fin du n° III.2.

(¹) *Zéro* est la moyenne des limites possibles de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx\, dx.$$

Cas du ψ de Dirac. — Il est bien connu qu'alors le premier membre de (27) est défini positif [*voir* plus bas, équ. (61)]. Ceci, joint à la signature $+1+1-1-1$ de la matrice diagonale β usuelle en théorie de Dirac, exhibe l'échange bien connu entre « grandes » et « petites » composantes du ψ lorsqu'on change le signe de l'énergie.

Cas général. — Ainsi qu'il est bien connu, il n'y a plus alors de signes définis pour les intégrales (27) ou (28). Dans ces conditions, la dénomination de *nombres d'occupation* appliquée aux n n'est pas exempte de quelque ambiguïté, non encore levée aujourd'hui.

III.4. **Introduction de la notation de Dirac. Fonction de distribution et fonction caractéristique de l'impulsion-énergie.** — ψ^a et ψ^b désignant toujours deux solutions quelconques de l'équation de Gordon [satisfaisant aux conditions de convergence (24)], posons, pour la forme en x de leur produit scalaire hermitien,

$$\langle \psi^a | \psi^b \rangle_\sigma = \langle \psi^b | \psi^a \rangle_\sigma^* = -\frac{i}{2k_0} \iiint_\sigma \bar{\psi}^a [\partial^\lambda] \psi^b \, d\sigma_\lambda, \tag{31}$$

et de même, pour la forme en k,

$$\langle \zeta^a | \zeta^b \rangle_\eta = \langle \zeta^b | \zeta^a \rangle_\eta^* = \iiint_\eta \bar{\zeta}^a \zeta^b \varepsilon(k) \, d\eta; \tag{32}$$

l'égalité de Parseval (28) se récrit suivant

$$\langle \psi^a | \psi^b \rangle_\sigma = \langle \zeta^a | \zeta^b \rangle_\eta. \tag{33}$$

Semblablement, en faisant jouer la définition (7), nous récrivons les intégrales de Fourier réciproques (15) et (18) suivant

$$\psi(x) = \langle e(-kx) | \zeta(k) \rangle_\eta, \tag{34}$$

$$\zeta(k) = \langle e(kx) | \psi(x) \rangle_\sigma. \tag{35}$$

Pour toutes les formules de la présente rubrique III restant à écrire, nous nous contenterons d'user de la notation condensée issue des (31) et (32), laissant au lecteur le soin de l'expliciter s'il le juge utile.

D'après les principes généraux de la Mécanique quantique, le second membre de l'expression (29) ou

$$n = \langle \psi | \psi \rangle_\sigma = \langle \zeta | \zeta \rangle_\eta \tag{36}$$

est la fonction intégrale de distribution de l'impulsion-énergie dans l'onde ψ. D'après une définition générale du Calcul des Probabilités, la transformée de Fourier de l'intégrand de cette expression (qui est la fonction de distribution densitaire) sera la *fonction caractéristique* de l'impulsion-énergie. Posons donc, dans (28) ou (33),

$$\zeta^a = \zeta, \qquad \zeta^b = \zeta \, e^{ik^\lambda y_\lambda}; \tag{37}$$

compte tenu de ce qui précède et de l'expression de l'intégrale de Fourier (15), nous voyons que la fonction caractéristique de l'impulsion-énergie (indépendante de σ) sera

$$F(y) = \langle \psi(x) | \psi(x+y) \rangle_\sigma; \tag{38}$$

ceci est la généralisation covariante d'une formule de E. Arnous [1].

III.5. **Résolution du problème de Cauchy. Localisation spatio-temporelle d'une particule.** — Introduisons la fonction singulière de Stueckelberg [20] et de Schwinger [17, p. 1450-1451]; [18, p. 678, équ. (A.29)]

$$\begin{aligned} D(x-x') &= -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \langle e(-k(x-x')) | 1 \rangle_\eta \\ &= -\langle e(-kx) | e(-kx') \rangle_\eta \end{aligned} \tag{39}$$

ou, explicitement,

$$\begin{aligned} D(x) &= -(2\pi)^{-3} \iiint_\eta e^{ik^\lambda x_\lambda} \varepsilon(k) \, d\eta \\ &= -2i(2\pi)^{-3} \iiint_{\eta_+} \sin k^\lambda x_\lambda \, d\eta; \end{aligned} \tag{40}$$

c'est une fonction imaginaire pure, impaire (paire en $\mathbf{x}$, impaire en x_4), solution quel que soit x de l'équation de Gordon. Un argument élémentaire montre qu'elle est nulle dans l'*ailleurs* : si x est du genre espace, une simple rotation des axes d'Univers suffit à changer le signe de x_4, et une telle transformation doit à la fois changer le signe de D et la laisser invariante.

De ces définitions, du fait que, x' étant fixé, la transformée de Fourier au sens (15) de $D(x-x')$ est $-e(-kx')$, et de (33), l'on conclut

$$\langle D(x-x') | D(x-x'') \rangle_\sigma = -D(x'-x''); \tag{41}$$

ainsi, pourvu que le quadrivecteur $x'-x'' \neq 0$ soit du genre espace, deux fonctions de x, $D(x-x')$ et $D(x-x'')$, sont orthogonales au sens (24) ou (28).

Substituant (18) dans (15), on résout formellement le problème de Cauchy sous une forme équivalente à celle de Schwinger [17, équ. (2.22)]; [18, équ. (A.29)]

$$\psi(x) = \langle D(x-x') | \psi(x') \rangle_{\sigma'}; \tag{42}$$

la présence de la dérivée normale du ψ relativement à σ', conformément à (31), est caractéristique de l'usage de l'équation du second ordre de Gordon. Au sujet des formules (41) (où les D sont imaginaires pures) et (42) (où les ψ sont éventuellement réelles), on se souviendra de la remarque de la fin du n° III.3, « cas du ψ scalaire ».

(42) n'est autre que le développement du ψ sur un système orthogonal complet de fonctions de x, $D(x-x')$, attachées à σ', où x' est l'indice de numération. La formule donnant les « coefficients »

$\psi(x')$ est

$$\psi(x') = \langle D(x'-x) \mid \psi(x) \rangle_\sigma \tag{43}$$

avec une σ passant par x. La fonction intégrale de distribution correspondante est le premier membre de (29) ou (36) avec $\sigma = \sigma'$, autrement dit le flux du courant de Gordon à travers σ'. Ceci se voit aussi en remarquant que (18) ou (35) est le développement du ζ sur le système orthogonal complet des transformées de Fourier des D.

Égalant les expressions (34) et (42) du ψ, il vient

$$\langle D(x-x') \mid \psi(x') \rangle_{\sigma'} = \langle e(-kx) \mid \zeta(k) \rangle_{\eta}, \tag{44}$$

ce qui, compte tenu de la remarque faite juste avant la formule (41), est une spécification particulière de la formule de Parseval; le premier membre de (44), de même structure que le second membre de (38), est une généralisation du produit de composition.

Les fonctions de x, $D(x-x')$, attachées à une σ' ont une interprétation physique simple. Supposons σ' entièrement pavée de petites cellules jointives, et constituons un jeu complet d'écrans d'Univers « complémentaires » au sens de l'optique, en retirant un pavé et un seul de σ' de toutes les manières possibles; le nombre d'occupation de l'onde $D(x-x')$ attachée au point moyen de la petite ouverture dans l'hyperécran σ' est le nombre de corpuscules qui franchissent σ' à travers cette ouverture; toutes leurs localisations spatio-temporelles passées et futures sont contenues dans le cône isotrope de sommet x'. L'intérieur de ce cône est en somme l'intérieur d'un tube d'Univers du genre temps, et il y a *correspondance* au sens de Bohr entre le nombre d'occupation n de l'onde $D(x-x')$ et le nombre classique de trajectoires « cachées » à l'intérieur du tube.

De même que les ondes planes monochromatiques sont associées à l'idée de localisation de l'impulsion-énergie d'un corpuscule en un point bien déterminé de l'hyperboloïde $\eta(k) = 0$, de même les ondes $D(x-x')$ sont associées à l'idée de localisation spatio-temporelle du corpuscule au sens qu'on vient de préciser; d'après la formule (40), l'impulsion-énergie d'un corpuscule porté par une onde $D(x-x')$ est complètement indéterminée sur l'hyperboloïde η. Il y a donc bien *complémentarité*, au sens de Bohr, entre les $D(x-x')$ et les ondes planes monochromatiques.

Comme il est bien connu par les travaux de Feynman [9] et de Schwinger [19], les formules (42) et (43) mettent en évidence le rôle des $D(x-x')$ comme *amplitudes de transition* (imaginaires pures) entre un point x de σ et un point x' de σ', et l'assimilation du $D(x-x')$ à une matrice continue numérotée par les indices x et x'.

Voici une dernière remarque. Il résulte de l'équation de continuité du courant de Gordon que, x' étant fixé, la validité de la formule (42) n'est pas limitée au cas où l'hypercloison σ barrant l'intérieur du cône isotrope est du genre espace. Mais, tandis qu'on peut choisir arbitrairement le $\psi(x)$ sur une portion de σ du genre espace et obtenir par (42) une contribution au $\psi(x')$ solution de l'équation de Gordon, le $\psi(x)$ sur une portion de σ du genre temps n'est pas arbitraire, mais doit satisfaire à une certaine équation intégrale : ceci est dû aux propriétés de la fonction $D(x)$, nulle dans l'*ailleurs*, mais non nulle dans le *futur* ou le *passé*. Ces remarques peuvent servir de point de départ à une théorie covariante relativiste de la diffraction par une ouverture plane à contour variable [8], théorie aisément faite à l'approximation classique de Fresnel-Kirchhoff, mais non encore complètement élucidée en tant que théorie générale rigoureuse.

III.6. Des formules analogues aux précédentes valent dans le 4-espace k. Substituant (15) dans (18), et définissant la fonction de deux variables, qui se transforme en sa conjuguée par échange de k et de k',

$$\begin{aligned} D(k, k') &= \langle e(kx) \mid e(k'x) \rangle_\sigma \\ &= \langle D(k, k'') \mid D(k', k'') \rangle_{\eta}, \end{aligned} \tag{45}$$

il vient

$$\zeta(k) = \langle D(k, k') \mid \zeta(k') \rangle_{\eta}, \tag{46}$$

puis, égalant les expressions (18) et (46) de $\zeta(k)$,

$$\langle D(k, k') \mid \zeta(k') \rangle_{\eta} = \langle e(kx) \mid \psi(x) \rangle_{\sigma}, \tag{47}$$

ce qui est une spécification particulière de (33).

IV. — Particule libre à spin.

IV.1. $\underset{\rightarrow}{\partial^\lambda}$ et $\underset{\leftarrow}{\partial^\lambda}$ désignant les opérateurs différentiels partiels agissant respectivement vers la droite et vers la gauche, a_λ quatre matrices carrées qui peuvent toujours être prises, ainsi que β, hermitiennes, les équations de la particule à spin ont la forme

$$\left(a_\lambda \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} + k_0\right) \psi(x) = 0, \qquad \bar{\psi}(x) \left(a_\lambda \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda} - k_0\right) = 0, \tag{48}$$

ou encore, dans le 4-espace k,

$$(a_\lambda k^\lambda - ik_0)\zeta(k) = 0, \qquad \bar{\zeta}(k)(a_\lambda k^\lambda - ik_0) = 0. \tag{49}$$

Mettant ici de côté les théories de particules à spin à masses multiples [15], nous pouvons dire que, quelle que soit l'algèbre suivie par les a_λ, l'équation de Gordon (12) ou (13) est conséquence des équations matricielles du premier ordre (48) ou (49) : toutes les formules du précédent paragraphe III restent donc valables. Mais, aussi, elles peuvent toutes être transformées grâce aux (48) et (49) et à leurs conséquences.

Une conséquence immédiate des (49), qui permet la transformation du second membre de (28), est

$$k^\lambda \bar{\zeta}^a \alpha_\lambda \zeta^b = ik_0 \bar{\zeta}^a \zeta^b. \tag{50}$$

Cette formule appartient à la famille des dix relations tensorielles de Franz-Kofink [4], [10], [13], écrites dans leur forme en k. Pour la suite, nous aurons besoin d'une autre formule de la famille, celle qui, dans sa forme en x, fournit la décomposition du courant de Gordon, bien connue [11],

$$-\frac{i}{2k_0}\bar{\psi}^a[\partial^\lambda]\psi^b = i\bar{\psi}^a \alpha^\lambda \psi^b + \frac{i}{2k_0}\partial_\mu \bar{\psi}^a[^{\lambda\mu}]\psi^b, \tag{51}$$

et qui, dans sa forme en k, affirme que, dans une onde plane, le courant de Dirac est colinéaire à l'impulsion-énergie

$$k^\lambda \bar{\zeta}^a \zeta^b = ik_0 \bar{\zeta}^a \alpha^\lambda \zeta^b; \tag{52}$$

dans (51), la matrice $[^{\lambda\mu}]$ figurant dans le tenseur antisymétrique $\bar{\psi}[^{\lambda\mu}]\psi$ « densité de polarisation électromagnétique » a une expression qui dépend de l'algèbre suivie par les α_λ.

La formule (51) est engendrée à partir de deux formules analogues aux (48); en vue de la suite, nous avons besoin d'une de ces formules

$$\partial^\lambda \psi = -\{[^{\lambda\mu}]\partial_\mu + k_0 \alpha^\lambda\}\psi. \tag{53}$$

IV.2. **Nouvelle forme de l'égalité de Parseval.** — En faisant jouer (50) et (4_2), nous pouvons donner de (32) la nouvelle expression

$$\langle \zeta^a | \zeta^b \rangle_\eta = \langle \zeta^b | \zeta^a \rangle_\eta^* = i \iiint_\eta \bar{\zeta}^a \alpha^\lambda \zeta^b \varepsilon(k)\, \mathrm{d}\eta_\lambda. \tag{54}$$

Par ailleurs, prenant le flux des trois courants de (51) à travers une σ du genre espace, le flux du courant de polarisation est nul car, du fait de l'antisymétrie du tenseur de polarisation, il se transforme en intégrale double nulle étendue au contour à l'infini de σ.

Nous pouvons donc énoncer : *les flux du courant de Gordon* $-\frac{i}{2k_0}\bar{\psi}[\partial^\lambda]\psi$ *et du courant de Dirac* $i\bar{\psi}\alpha^\lambda\psi$ *à travers une hypersurface* σ *du genre espace sont égaux*, et récrire (31) suivant

$$\langle \psi^a | \psi^b \rangle_\sigma = \langle \psi^b | \psi^a \rangle_\sigma^* = i \iiint_\sigma \bar{\psi}^a \alpha^\lambda \psi^b \, \mathrm{d}\sigma_\lambda. \tag{55}$$

Une autre procédure eût été de partir de (52) au lieu de (51), de mettre (32) sous la forme

$$-k_0^2 \iiint \frac{\bar{\zeta}^a \alpha^\lambda \zeta^b}{k_4^2}\varepsilon(k)\, \mathrm{d}\mathbf{k}^3,$$

et de faire un calcul analogue à celui qui avait fourni la formule (25); ceci montre à nouveau que la formule (51) est équivalente à (52).

Finalement, nous avons mis l'égalité de Parseval (28) sous la nouvelle forme très symétrique

$$i \iiint_\sigma \bar{\psi}^a \alpha^\lambda \psi^b \, \mathrm{d}\sigma_\lambda = i \iiint_\eta \bar{\zeta}^a \alpha^\lambda \zeta^b \varepsilon(k)\, \mathrm{d}\eta_\lambda. \tag{56}$$

Vérifions directement la loi de passage au complexe conjugué impliquée dans (54) et (55). Lorsque β et les α_λ sont hermitiennes, on a les lois de commutation [12, équ. (3')]

$$\beta\alpha_\lambda = \pm \alpha_\lambda \beta \qquad (-\text{ si } \lambda = 1, 2, 3;\ + \text{ si } \lambda = 4); \tag{57}$$

par ailleurs

$$(i\,\mathrm{d}\sigma_\lambda)^* = \pm\, i\,\mathrm{d}\sigma_\lambda \qquad (-\text{ si } \lambda = 1, 2, 3;\ + \text{ si } \lambda = 4); \tag{58}$$

finalement

$$(i\psi^{+a}\beta\alpha^\lambda\psi^b \, \mathrm{d}\sigma_\lambda)^* = i\psi^{+b}\beta\alpha^\lambda\psi^a \, \mathrm{d}\sigma_\lambda, \tag{59}$$

C. Q. F. D.

Un calcul de ce genre est impliqué dans les formules de Schwinger [17, équ. (1.50) et (1.51)].

Intégrant (55) à temps constant, nous trouvons l'expression classique de la norme ou de l'orthogonalité

$$\langle \psi^a | \psi^b \rangle = \iiint \psi^{+a}\beta\alpha_4\psi^b \, \mathrm{d}\mathbf{x}^3 \tag{60}$$

qui, dans le cas particulier de l'équation de Dirac, se réduit à

$$\langle \psi^a | \psi^b \rangle = \iiint \psi^{+a}\psi^b \, \mathrm{d}\mathbf{x}^3. \tag{61}$$

Il est intéressant de remarquer que deux ondes planes monochromatiques de même impulsion $\mathbf{k}$ mais d'énergies opposées $\pm k_4$ sont orthogonales au sens classique (60) : cela résulte de ce qui fut dit à la fin du n° III.1; cela se voit aussi grâce à la conséquence des (49)

$$(k^\lambda - k'^\lambda)\bar{\zeta}(k)\alpha_\lambda \zeta(k') = 0, \tag{62}$$

écrite avec

$$k_\lambda = (\mathbf{k}, +k_4) \qquad \text{et} \qquad k'_\lambda = (\mathbf{k}, -k_4).$$

Finalement, deux ondes planes quelconques sont orthogonales à la fois au sens classique (60) et au nouveau sens covariant (54) et (55).

IV.3. **Nouvelle forme des intégrales de Fourier covariantes.** — Compte tenu de (49) et de (4_2), (15) devient

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} i \iiint_\eta e^{ik^\lambda x_\lambda}\alpha^\mu \zeta(k)\varepsilon(k)\, \mathrm{d}\eta_\mu, \tag{63}$$

expression que, compte tenu de (7) et de (54), nous récrivons symboliquement suivant

$$\psi(x) = \langle\langle e(-kx) | \zeta(k) \rangle\rangle_\eta; \tag{64}$$

en effet, la fonction scalaire $e(-kx)$, solution de l'équation de Gordon, ne saurait être solution de l'équation de la particule à spin, en sorte que la formule (64), rigoureusement valable au sens (32), ne saurait être que symboliquement valable au sens (54).

Dans la formule (18), nous pouvons remplacer $\partial^{\mu}\psi$ d'après (53). Le groupe de termes $[^{\mu\nu}]\,\partial_{\nu}$ sera intégré par parties, la partie tout-intégrée se transformant, du fait de l'antisymétrie de $[^{\mu\nu}]$, en intégrale double nulle; il y a ensuite une autre intégrale en $[^{\mu\nu}]$ où l'opérateur ∂_{ν}, agissant cette fois sur l'exponentielle, engendre des termes en k_{ν} qui s'ajoutent à celui figurant déjà. Tous calculs faits, l'on obtient

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2k_0}\iiint_{\sigma} e^{-ik^{\lambda}x_{\lambda}} \times \{k^{\mu} - [^{\mu\nu}]\,k_{\nu} + ik_0\beta^{\mu}\}\,\psi(x)\,d\sigma_{\mu}. \tag{65}$$

Substituant (65) dans (15), l'on résout formellement le problème de Cauchy suivant

$$\psi(x) = \iiint_{\sigma'} S^{\lambda}(x-x')\,\psi(x')\,d\sigma'_{\lambda}, \tag{66}$$

avec

$$S^{\lambda}(x) = -\frac{i}{2k_0}\{\partial^{\lambda} - [^{\lambda\mu}]\,\partial_{\mu} - k_0\beta^{\lambda}\}\,D(x). \tag{67}$$

Dans le cas de l'équation de Dirac ($a_{\lambda} = \gamma_{\lambda}$), l'on a

$$[^{\lambda\mu}] = \frac{1}{2}[\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}] = \left\{\begin{matrix} \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu} & \text{si} & \lambda \neq \mu, \\ 0 & \text{si} & \lambda = \mu; \end{matrix}\right\} \tag{68}$$

ceci, joint au fait que les γ_{λ} admettent des inverses, ramène (65) à la forme

$$\zeta_{(\frac{1}{2})}(k) = -\frac{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{2k_0}\iiint_{\sigma}(\gamma_{\mu}k^{\mu} + ik_0) \times e^{-ik_{\lambda}x^{\lambda}}\gamma^{\nu}\psi_{(\frac{1}{2})}(x)\,d\sigma_{\nu}, \tag{69}$$

qui est canonique au sens (55) :

$$\zeta_{(\frac{1}{2})}(k) = \left\langle \frac{i}{2k_0}(\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\,e(kx) \,|\, \psi_{(\frac{1}{2})}(x) \right\rangle_{\sigma}. \tag{70}$$

De même, posant

$$S_{(\frac{1}{2})}(x) = -\frac{i}{2k_0}(\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\,D(x), \tag{71}$$

l'on met (66) sous la forme canonique de Schwinger [17, équ. (2.23) et 2.24)]; [18, équ. (A.29)]

$$\psi_{(\frac{1}{2})}(x) = \langle S_{(\frac{1}{2})}(x-x') \,|\, \psi_{(\frac{1}{2})}(x') \rangle_{\sigma'}. \tag{72}$$

Naturellement, les fonctions $(\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - k_0)\,e^{ik^{\lambda}x_{\lambda}}$ et $S_{(\frac{1}{2})}$ étant solutions de l'équation de Gordon, les formules (70) et (72) s'entendent aussi au sens (31), et sont alors intégralement équivalentes à (35) et (42) respectivement.

Mais la concision des formules (70) et (72) ne se retrouve pas pour les valeurs du spin supérieures à $\frac{h}{4\pi}$, cela du fait que les a_{λ} n'ont plus alors d'inverses. Force est alors d'en rester aux expressions covariantes, mais non canoniques au sens (55), (65), (66) et (67). Dans le cas de la théorie de Kemmer [12], l'on a

$$[^{\mu\nu}] = \beta^{\mu}\beta^{\nu} - \beta^{\nu}\beta^{\mu}. \tag{73}$$

V. — Particule plongée dans un champ extérieur.

V.1. Formules générales. — Si l'équation relativiste de la particule contient un terme de champ ambiant $A(x)$, la transformée de Fourier des produits $A(x)\,\psi(x)$ est un « produit de composition », et l'intégrale de Fourier quadruple ne se réduit pas à une intégrale triple comme dans le cas de la particule libre. Nous aurons donc, $d\tau$ et $d\omega$ étant réels, les intégrales de Fourier réciproques

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{4\pi^2}\iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^{\lambda}x_{\lambda}}\zeta(k)\,d\tau, \\ i\,d\tau &= dk_1\,dk_2\,dk_3\,dk_4, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta(k) &= \frac{1}{4\pi^2}\iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik^{\lambda}x_{\lambda}}\psi(x)\,d\omega, \\ i\,d\omega &= dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Ces formules n'auront de sens, en norme L_2, que si l'on a les r conditions, où $j = 1, 2, \ldots, r$ désigne l'indice de spin (pas de sommation sur j !)

$$N_j = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \psi^{*j}\psi^{j}\,d\omega = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \zeta^{*j}\zeta^{j}\,d\tau = \text{nombres (réels positifs) bornés.} \tag{76}$$

Introduisant d'après (9) les adjoints relativistes $\bar{\psi}$ et $\bar{\zeta}$ du ψ et du ζ, les (76) entraînent une valeur bornée en module pour le nombre réel, invariant relativiste, homogène à une action [2, p. 223-224]; [5, équ. (IV.32)]

$$\mathcal{A} = -m_0\iiiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}\psi\,d\omega = -m_0\iiiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\zeta}\zeta\,d\tau = \text{action bornée.} \tag{77}$$

Ici se présente une apparente difficulté. Physiquement, la norme du ψ n'est aucunement l'intégrale quadruple (77), mais l'intégrale triple, conservative en vertu de l'équation d'onde,

$$n = i\iiint_{\sigma} \bar{\psi}\,a^{\lambda}\psi\,d\sigma_{\lambda}. \tag{78}$$

Si l'intégrale triple (78) est finie, l'intégrale quadruple (77) sera infinie, et la validité des (74) et (75) ne sera pas établie.

Nous allons donc modifier légèrement l'équation d'onde de la manière que voici. Introduisons arbitrairement quatre hypersurfaces du genre espace, ne se coupant pas, se succédant dans le temps, σ_1 et σ_2 arbitrairement loin dans le passé, σ_3 et σ_4 arbitrairement loin dans le futur (pour alléger le discours, nous nous sommes limités au cas du sous-groupe de Lorentz orthochrone). Entre σ_1 et σ_2 d'une part, σ_3 et σ_4 de l'autre, supposons que le champ ambiant comporte un terme additif imaginaire pur, de sorte qu'entre σ_1 et σ_2 d'une part, σ_3 et σ_4 de l'autre, la divergence du courant $i\,\bar{\psi}\alpha^\lambda\psi$ ne soit pas nulle; nous supposerons cet « extra-champ » tel que l'intégrale (78), conservative entre σ_2 et σ_3, tombe à *zéro* avant σ_1 et après σ_4. Avant σ_1 et après σ_4, l'intégrale (78) étendue à un contour fermé quelconque sera identiquement nulle, en sorte que ψ est identiquement nul dans ces régions. De la sorte, l'intégrale (77) sera, comme il le fallait, finie, quoiqu'arbitrairement grande. Il va sans dire que cet artifice est introduit comme un pur intermédiaire mathématique, et n'a aucune signification ni réalité physiques.

Deux fonctions quelconques (solutions ou non de l'équation d'onde) seront dites *orthogonales*, au sens de la norme non définie positive (77), si leur *produit scalaire hermitien*

$$\begin{aligned}\langle\psi^a|\psi^b\rangle &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty}\bar{\psi}^a\psi^b\,\mathrm{d}\omega\\ &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty}\bar{\zeta}^a\zeta^b\,\mathrm{d}\tau = \langle\zeta^a|\zeta^b\rangle \qquad (79)\end{aligned}$$

est nul. Par exemple, les fonctions $\zeta\,e^{ik^\lambda x_\lambda}$, où aucune restriction n'est imposée au quadrivecteur k, forment un système orthogonal, et de plus complet en vertu des (74) et (75).

L'opérateur des ondes est self-adjoint (nous ne disons pas hermitien !) au sens de la norme non définie positive (77). Vérifions-le dans le cas de l'électron de Dirac, où les équations d'onde adjointes s'écrivent, compte tenu de « l'extra-champ » que nous avons postulé,

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\alpha_\lambda\left(\underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} + A'^\lambda + iA^\lambda\right) + k_0\right\}\psi = 0,\\ &\bar{\psi}\left\{\alpha_\lambda\left(\underset{\leftarrow}{\partial_\lambda} + A'^\lambda - iA^\lambda\right) - k_0\right\} = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

les trois A'_α ($\alpha = 1, 2, 3$) sont imaginaires pures, A'^4 réelle. Récrivons les (80) en notation de Dirac

$$|\varpi\psi\rangle = k_0\psi, \qquad k_0\bar{\psi} = \langle\psi\varpi|, \qquad (81)$$

et formons l'expression

$$\begin{aligned}&\langle\psi|\varpi\psi\rangle - \langle\psi\varpi|\psi\rangle\\ &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty}(\partial^\lambda + 2A'^\lambda)\bar{\psi}\alpha_\lambda\psi\,\mathrm{d}\omega\\ &= i\left\{\iiint_{\sigma_{+\infty}} - \iiint_{\sigma_{-\infty}}\right\}\bar{\psi}\alpha^\lambda\psi\,\mathrm{d}\sigma_\lambda\\ &\quad + 2\left\{\iiiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \iiiint_{\sigma_3}^{\sigma_4}\right\}A'_\lambda\bar{\psi}\alpha^\lambda\psi\,\mathrm{d}\omega; \qquad (82)\end{aligned}$$

en vertu de nos hypothèses, chacune des deux intégrales triples et la somme des deux intégrales quadruples sont nulles, en sorte que

$$\langle\psi|\varpi\psi\rangle = \langle\psi\varpi|\psi\rangle, \qquad (83)$$

C. Q. F. D.

Le terme (réel) de masse propre k_0 peut être considéré comme une valeur propre multiple de l'opérateur self-adjoint ϖ, les fonctions propres correspondantes étant les solutions de l'équation des ondes.

V.2. **Cas où le champ ambiant admet une invariance de translation.** — Ox_μ désignant un axe quelconque appartenant à un quadrèdre lorentzien, l'on peut toujours mettre l'équation de la particule à spin plongée dans un champ sous la forme

$$\partial_\mu\psi = P_\mu\psi. \qquad (84)$$

Lorsque le champ ambiant est invariant par les translations parallèles à Ox_μ, c'est-à-dire lorsque la composante correspondante de l'impulsion-énergie totale est intégrale première [5, p. 153], l'hamiltonien P_μ associé à x_μ est indépendant de x_μ. Dans ce cas, en raisonnant dans l'espace des k, l'on peut montrer avec M. Lévy [14] que l'on est ramené à un formalisme d'intégrales de Fourier triples étendues à un hyperplan x_μ = const. arbitraire, et que l'intégration de l'équation des ondes est ramenée à un problème aux fonctions et valeurs propres de l'hamiltonien P_μ.

Le cas où l'axe considéré Ox_μ serait du genre espace correspond à des situations physiques très artificielles. Mais le cas où il est du genre temps est pratiquement très important : c'est le cas des « régimes permanents », la réaction du corpuscule $\psi(x)$ sur le champ ambiant étant négligée. Nous supposerons donc dans ce qui suit que le champ ambiant $A(x)$ est indépendant de $x_4 = ict$.

L'équation d'onde de la particule $\psi(x)$ est de la forme

$$(\alpha_\lambda\partial^\lambda - k_0)\psi(x) = \{A(x)\psi(x)\}; \qquad (85)$$

$\{\ \}$ désigne une certaine somme de produits des composantes de $A(x)$ par celles de $\psi(x)$. Passant aux transformées de Fourier quadridimensionnelles des deux membres, il vient

$$(i\alpha_\lambda k^\lambda - k_0)\zeta(k) = \frac{1}{4\pi^2}\iiiint\{B(k-k')\zeta(k')\}\,\mathrm{d}\tau', \qquad (86)$$

avec

$$B(k) = \frac{1}{4\pi^2}\iiiint e^{-ik^\lambda x_\lambda}A(x)\,\mathrm{d}\omega. \qquad (87)$$

Introduisant la transformée de Fourier tridimensionnelle du champ ambiant (définie par hypothèse indépendamment de x_4)

$$C(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\iiint e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}A(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}^3, \qquad (88)$$

nous pouvons écrire

$$B(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k_4)\,C(\mathbf{k}), \tag{89}$$

en sorte que l'intégrale quadruple de (86) se ramène à une intégrale triple prise au niveau k_4 :

$$\begin{aligned}(i\alpha_k k^k - k_0)\,\zeta(k) \\ = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{k'_4 = k_4} \{ C(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\,\zeta(k') \}\, \mathrm{d}\mathbf{k}'^3.\end{aligned} \tag{90}$$

Cette formule équivaut à la suivante, où la valeur de k_4 est arbitraire :

$$\begin{aligned}(i\mathbf{a}.\mathbf{k} - k_0 + i\alpha_4 k_4)\,\zeta(\mathbf{k},\, k_4) \\ = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint \{ C(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\,\zeta(\mathbf{k}',\, k_4) \}\, \mathrm{d}\mathbf{k}'^3,\end{aligned} \tag{91}$$

en sorte que, comme il était annoncé, l'on est ramené à un problème aux valeurs propres ik_4 et aux fonctions propres $\zeta(\mathbf{k},\, k_4)$ de l'opérateur $(i\mathbf{a}.\mathbf{k} - k_0)$, ou plus précisément de l'opérateur hermitien d'énergie totale, de forme $(i\mathbf{b}.\mathbf{k} - k_0\, b_0)$, que sait définir toute théorie de particule à spin.

Appelons $\chi(k)$ ou $\chi(\mathbf{k},\, k_4)$ ces fonctions propres de l'énergie, pour les distinguer de la solution générale $\zeta(k)$ de l'équation des ondes. Chacune des χ n'est non nulle que dans une bande d'énergie k_4, $k_4 + \Delta k_4$ (cas du spectre continu), ou que sur une lame k_4 d'énergie (cas du spectre ponctuel), auquel cas il y a en général une multiplicité de $\zeta(k_4)$. On sait que les fonctions propres de l'énergie totale forment un système orthogonal complet au sens classique (sans sommation sur l'indice de spin j !) [2, p. 231-253] :

$$\iiint \chi^{*p} \chi^{q}\, \mathrm{d}\mathbf{k}^3 = 0; \tag{92}$$

il est évident que deux χ de k_4 différents sont aussi orthogonales au nouveau sens covariant (79), et que, dans le cas des χ attachées à un même k_4, on peut profiter de l'arbitraire de la multiplicité pour les rendre deux à deux orthogonales au nouveau sens (79) (exprimé dans ce cas particulier par une intégrale triple). Toujours dans ce dernier cas, les deux définitions, classique et nouvelle, coïncideront, pourvu que l'orthogonalité soit définie indépendamment de l'indice de spin j, ce qui est effectivement le cas [il suffit de songer aux $Y^l_m(\theta,\, \varphi)$ de l'atome hydrogénoïde].

Remarquons aussi que si $-ik_4$ est valeur propre de l'énergie, $+ik_4$ l'est aussi, car il est physiquement évident que l'équation aux valeurs propres de l'énergie doit être insensible à une réflexion des trois axes d'espace ou à une réflexion des quatre axes d'Univers; or, les deux équations aux valeurs propres ainsi transformées différeront par le signe du paramètre explorateur k_4. En résumé, l'énergie totale n'est définie qu'en module lorsqu'elle est intégrale première; cette circonstance est exprimée par la présence du radical dans la formule classique aux valeurs propres de l'énergie [2, p. 244].

Précisons la relation des fonctions propres de l'énergie $\chi(\mathbf{k},\, k_4)$, ou

$$\varphi(\mathbf{x},\, k_4) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \iiint e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x}} \chi(\mathbf{k},\, k_4)\, \mathrm{d}\mathbf{k}^3, \tag{93}$$

à la solution générale $\zeta(k)$ ou $\psi(x)$ de l'équation d'onde. Il est bien connu que, dans le cas considéré, $\rho(k_4)$ désignant une fonction arbitraire (à la normalisation près), la solution générale de l'équation d'onde peut être mise sous la forme

$$\psi(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(k_4)\, \varphi(\mathbf{x},\, k_4)\, e^{ik_4 x_4}\, \mathrm{d}k_4; \tag{94}$$

de (74), (93) et (94), l'on conclut [14]

$$\zeta(k) = \rho(k_4)\, \chi(\mathbf{k},\, k_4). \tag{95}$$

Il résulte de ce qui précède que, comme dans le cas du corpuscule libre, les solutions propres à énergies positives ne fournissent pas, à elles seules, un système complet pour développer la solution générale de l'équation d'onde. Il se pose donc, ici aussi, un problème d'interprétation des énergies négatives, dont la solution est, dans le spectre continu, de tous points semblable à celle valant pour le corpuscule libre.

En effet, dans le spectre continu, où $|W| \geq c^2 m_0$, le signe de l'énergie potentielle n'est pas imposé, de sorte que les deux signes sont *a priori* possibles pour la constante de couplage entre le corpuscule et le champ ambiant. Dans l'interprétation classique, le signe de l'énergie totale était essentiellement positif, et l'on acceptait *a priori* deux signes pour la constante de couplage : on pouvait avoir, disons, un électron ou un positon non lié dans le champ donné. Le présent formalisme covariant d'intégrales quadruples offre une autre possibilité : le signe de la constante de couplage sera fixe, mais les deux signes seront possibles pour l'énergie totale : le corpuscule non lié sera figuré dans la région $W \geq c^2 m_0$, l'anticorpuscule non lié dans la région $W \leq -c^2 m_0$. C'est là l'interprétation feynmanienne du système corpuscule-anticorpuscule.

Dans le spectre ponctuel, $|W| < c^2 m_0$, le signe de l'énergie potentielle est obligatoirement opposé au signe de l'énergie totale : une seule des deux possibilités, au choix, $0 < W < c^2 m_0$, ou $-c^2 m_0 < W < 0$, sera donc à retenir (à moins qu'une nouvelle extension du formalisme ne soit exigée par quelque circonstance telle que la non-identité du corpuscule libre avec son « conjugué de charge »).

Au sujet de l'interprétation des énergies négatives, un mot d'explication complémentaire ne sera pas inutile. Soit, dans l'Univers de Minkowski, un choc entre deux corpuscules : les deux trajectoires d'Univers peuvent être orientées arbitrairement toutes deux vers le futur (comme d'habitude), ou toutes deux vers le passé (figuration à la Feynman d'un choc de positons), ou l'une vers le futur et l'autre vers le passé (figuration à la Feynman d'un choc entre, disons, un proton et un positon). Les impulsions-énergies doivent être orientées comme les trajectoires, en sorte que ces diagrammes valent aussi dans le 4-espace k. Dans tous les cas, on a le théorème de conservation suivant : *La somme des impulsions-énergies convergeant vers l'instant-point du choc égale la somme des impulsions-énergies divergeant de l'instant-point du choc.*

Un énoncé analogue vaut pour les processus de désintégration ou de synthèse, et notamment pour l'émission ou l'absorption d'un photon par transition du précédent électron entre deux états d'énergies différentes, liés ou libres (ceci se peut, du fait de la présence du champ ambiant, et il faut inclure le cas de deux états électroniques non liés à énergies de signes opposés : création ou annihilation d'une paire dans le champ, avec absorption ou émission d'un photon).

Le précédent formalisme d'intégrales quadruples, porté dans le formalisme de Feynman, fournit directement l'amplitude attachée à la transition précédente, comme à celles d'ordres plus élevés (diffusion cohérente ou effet Raman, etc.). A titre d'exemple, écrivons l'élément de matrice pour les transitions électroniques du premier ordre. B_λ désignant le quadrivecteur de polarisation du photon, k_μ son impulsion-énergie, $\psi^a(x)$ et $\psi^b(x)$ les deux états de l'électron, l'application pure et simple de la règle de Feynman [9] donne l'expression suivante (non normée) pour l'amplitude de transition :

$$B_\lambda \iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^\rho x_\rho} \bar{\psi}^a(x)\, \gamma^\lambda \psi^b(x)\, d\omega. \tag{96}$$

Faisons sortir des ψ le facteur exponentiel en iWt : la précédente intégrale ne sera non nulle que si

$$k_4 + K_4^b - K_4^a = 0. \tag{97}$$

et alors, toujours à un facteur près, elle se réduit à

$$B_\lambda \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\{\mathbf{k}.\mathbf{x} + (k_4 + K_4^b - K_4^a)x_4\}} \times \bar{\varphi}(\mathbf{x}, K_4^a)\, \gamma^\lambda \varphi(\mathbf{x}, K_4^b)\, d\mathbf{x}^3, \tag{98}$$

ce qui est l'expression bien connue pour l'amplitude de transition par unité de temps dans l'émission-absorption dipolaire. Remarquons en passant que le formalisme de Feynman [9, n° 8], en plein accord avec celui de L. de Broglie [3, p. 45-64], ne distingue pas entre les cas du photon longitudinal et du photon transversal. M. L. de Broglie a montré que, dans sa théorie, la probabilité d'émission-absorption dipolaire d'un photon longitudinal est commandée par la masse propre du photon, et tend vers *zéro* en même temps que celle-ci [3, p. 45-64].

V.3. **Retour sur l'interprétation du cas général.** — Les intégrales quadruples (74) à (79) présentent, comme y a insisté par avance L. de Broglie [2, p. 301-307], le caractère paradoxal (mais très minkowskien) d'exprimer une physique sans évolution, puisque tout le devenir temporel des phénomènes est intégré d'un coup. Mais la théorie de la superquantification sous sa forme covariante relativiste, et nommément la théorie de Schwinger [17, § I et II] de la représentation de Heisenberg, de la nouvelle représentation d'interaction, et de leurs rapports mutuels, fournit aujourd'hui la réponse qu'on n'apercevait pas encore en 1934.

En représentation superquantifiée de Heisenberg, chacun des deux champs en interaction obéit à ses équations de particule plongée dans le champ de l'autre, et la fonction de répartition des nombres d'occupation est invariable. Ce n'est donc pas du fait d'un accident fâcheux que nous avons été obligés de traiter ce cas au moyen d'intégrales quadruples : c'est par essence que la représentation de Heisenberg est une représentation sans évolution, puisque par ailleurs la fonction de répartition des nombres d'occupation y est invariable.

Si nous voulons une représentation avec évolution, il faut, au moyen de la transformation unitaire de Schwinger [17, § II], passer en représentation d'interaction. Dans la représentation d'interaction pure, chaque champ obéit à ses équations de particule libre, et l'interaction est décrite au moyen d'un opérateur fonction d'instant-point agissant dans l'espace abstrait attaché aux nombres d'occupation, et faisant varier la fonction de répartition définie comme une fonctionnelle d'hypersurface du genre espace. C'est bien là une représentation avec évolution.

Physiquement, ce sont souvent les représentations mixtes, où une partie de l'interaction est décrite d'une manière et l'autre de l'autre, qui fournissent la réponse adéquate aux questions qu'on se pose. Par exemple, en appliquant les règles de Feynman pour écrire la formule (98), nous avons représenté la liaison de l'électron au noyau à la Heisenberg (en harmonie avec la notion de niveaux d'énergie arbitrairement fins et la quatrième relation d'incertitude) et l'interaction du même électron avec le champ des photons libres en représentation d'interaction (en harmonie avec les notions de transition électronique et d'émission-absorption de photons).

Comme autre exemple, considérons un effet Stark ou Zeeman. Deux points de vue sont possibles. On peut s'intéresser à l'altération du spectre naturel de l'atome par le champ perturbateur : alors, celui-ci doit être introduit dans l'équation d'onde de l'électron, et l'on est *ipso facto* en représentation de Heisenberg. L'on peut aussi s'intéresser aux transitions que le champ perturbateur induit entre les niveaux naturels de l'atome : alors, il faut se placer en représentation d'interaction.

Ceci nous montre une généralisation possible de la notion d'effet Stark-Zeeman : un atome est soumis à un champ électromagnétique arbitrairement variable, assez petit toutefois pour être considéré comme une perturbation. Deux problèmes peuvent être posés :

1° Altération du spectre naturel de l'atome par le champ perturbateur, y compris l'effet de quatrième relation d'incertitude : alors, c'est la représentation de Heisenberg, y compris les intégrales quadruples (74) à (79), qui s'impose.

2° Transitions induites par le champ perturbateur entre niveaux naturels de l'atome : alors, c'est la représentation d'interaction qui s'impose.

Ceci nous conduit finalement à la généralisation maxima possible des précédentes idées. Un électron, par exemple, est plongé dans un champ électromagnétique arbitrairement variable et, en outre, il est en interaction avec le champ des photons libres. On demande les amplitudes d'émission ou d'absorption de photons des différentes fréquences et directions, induites par la présence du champ ambiant.

Les transitions de l'électron se font entre solutions orthogonales de l'équation des ondes (85) définies à la manière « éternelle » (79). L'application de la règle de Feynman [9] sous sa forme en k fournit directement la réponse cherchée comme un « produit de composition »

$$B_\lambda \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{\zeta}^a(K)\gamma^\lambda\zeta^b(K+k)\,\mathrm{d}\tau, \qquad (99)$$

où l'impulsion-énergie k du photon est un quadrivecteur isotrope; un facteur de normalisation a été négligé.

VI. — Continuité entre les cas du corpuscule libre ou plongé dans un champ extérieur.

Cette continuité se démontre en deux temps.

VI.1. La remarque essentielle est la similitude de forme entre les seconds membres des formules (15) et (74) d'une part, (24) et (76) de l'autre.

Dans le cas du corpuscule libre, prenons quatre hypersurfaces du genre espace, σ_1 et σ_2 arbitrairement loin dans le passé, σ_3 et σ_4 arbitrairement loin dans le futur, et, par raison de symétrie, supposons que (σ_1, σ_4) et (σ_2, σ_3) soient respectivement deux hyperboloïdes à deux nappes centrés sur l'origine des coordonnées. Entre ces deux hyperboloïdes introduisons, comme au n° V.1, une distribution de sources-puits du ψ, impaire dans l'espace-temps et isotrope dans l'espace, faisant tomber à *zéro* le ψ avant σ_1 et après σ_4. Il suivra de là un étalement du spectre de la masse propre dans le 4-espace k, d'autant plus faible que σ_2 et σ_3 seront plus éloignées. σ_2 et σ_3 étant à distance finie, c'est la définition (79) de l'orthogonalité de deux ψ qui convient, mais, σ_2 et σ_3 étant repoussées à l'infini, c'est la définition (28) ou (56) qui prend sa place. Dans le 4-espace k, il y a continuité entre les définitions (79) et (28) de l'orthogonalité, et il en va donc de même dans le 4-espace x.

VI.2. La transformation de Schwinger [17, § II], qui permet de passer de la représentation d'interaction à la représentation de Heisenberg, est unitaire. Elle conserve donc l'orthogonalité de deux ψ entendue au sens quadridimensionnel (79).

Manuscrit reçu le 8 février 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Arnous E. — *J. Physique Rad.*, 1947, **8**, 87-93.
[2] Broglie L. de. — L'électron magnétique, Paris, 1934.
[3] Broglie L. de. — Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Paris, 1942.
[4] Costa de Beauregard O. — *J. Math. pures et appl.*, 1943, **22**, 151-161.
[5] Costa de Beauregard O. — La théorie de la Relativité restreinte, Paris, 1949.
[6] Costa de Beauregard O. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 810-816.
[7] Costa de Beauregard O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 1357.
[8] Costa de Beauregard O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **240**, 160.
[9] Feynman R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.
[10] Franz W. — *Sitz. Math. Abt. Bay. Akad.*, 1935, **3**, 379 et suiv.
[11] Gordon W. — *Z. Physik*, 1928, **50**, 630.
[12] Kemmer N. — *Proc. Roy. Soc.*, 1939, **173**, 91-116.
[13] Kofink W. — *Ann. Physik*, 1940, **38**, 565 et suiv.
[14] Lévy M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1950, **204**, 149.
[15] Potier R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **222**, 638, 855 et 1076; 1946, **223**, 651; 1947, **224**, 1332; 1948, **226**, 63 et 1690; 1948, **227**, 1146; 1949, **228**, 656; 1951, **232**, 1538, 1647 et 1736.
[15'] Potier R. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 688.
[16] Riesz M. — Actes du 10e Congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, p. 123-131.
[17] Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439-1461.
[18] Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 651-679.
[19] Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 664-679.
[20] Stueckelberg E. C. G. — *Arch. Sc. Phys. Nat.*, Genève, 1939, **56**, n° 1.