LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM TOME 17, OCTOBRE 1956, PAGE 872.

COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE, II.

Par M. O. COSTA de BEAUREGARD
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — Suite à notre précédent article [7]. On introduit le projecteur projetant toute solution de l'équation de Gordon suivant une solution de l'équation de la particule libre à spin pour condenser nos précédentes formules. Dans le cas de la particule plongée dans un champ, l'on précise la relation entre deux définitions de l'orthogonalité des solutions : classique, par une intégrale triple, ou adaptée aux transformations de Fourier, par une intégrale quadruple.

I. — Introduction.

Nous avons récemment proposé un formalisme quantique de base entièrement covariant relativiste, utilisant des intégrales triples curvilignes de l'espace-temps et de l'espace des quadri-fréquences dans le cas de la particule libre, et des intégrales quadruples dans le cas de la particule plongée dans un champ extérieur [7]. Nous voulons montrer ici qu'en introduisant le projecteur qui projette toute solution de l'équation de Gordon suivant une solution de l'équation de la particule libre à spin, l'écriture des formules que nous avions proposées pour ce cas gagne beaucoup en concision et en généralité. D'autre part, dans le cas de la particule plongée dans un champ extérieur, nous n'avions pas mis en évidence, d'une façon générale, qu'il y équivalence entre la définition classique de l'orthogonalité des solutions de l'équation des ondes par une intégrale triple, et la définition nouvelle par une intégrale quadruple qu'impose la considération des transformations réciproques de Fourier ; nous voulons ici combler cette lacune.

Sauf indication spéciale, nous conservons les notations et définitions de notre précédent article [7], qui sont du reste classiques, ou faciles à saisir intuitivement ; lorsque nous nous référerons à une formule de cet article, nous la ferons précéder du chiffre romain I.

Nous tenons à remercier M. R. Potier pour les nombreux entretiens que nous avons échangés sur les questions où ses travaux et les nôtres sont en interférence, et aussi MM. Umezawa et Visconti qui, en nous permettant de lire avant publication l'un de leurs travaux [6], nous ont fourni l'expression explicite d'un projecteur que nous considérons, en même temps que l'énoncé de ses conditions d'existence.

II. — Particule libre à spin.

II.1. — Nous considérons la théorie générale des particules à spin dans laquelle la forme générale des équations d'onde est

$$-i\left(a_\lambda \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} + k_0\right)\varphi(x) = 0, \quad \bar{\varphi}(x)\left(a_\lambda \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda} - k_0\right) i = 0, \quad (1)$$

ou, symboliquement,

$$2k_0 \Lambda\left(\underset{\rightarrow}{\partial}\right)\varphi = 0, \qquad 2k_0 \bar{\varphi}\Lambda\left(-\underset{\leftarrow}{\partial}\right) = 0\,; \quad (2)$$

la raison d'être des facteurs $2k_0$ apparaîtra au n° II.3. Umezawa et Visconti [6] ont cherché un opérateur $D\left(\underset{\rightarrow}{\partial}\right)$ ou $D\left(-\underset{\leftarrow}{\partial}\right)$, développable suivant les puissances croissantes des ∂_λ, tel que

$$\Lambda\left(\underset{\rightarrow}{\partial}\right) D\left(\underset{\rightarrow}{\partial}\right) \equiv D\left(-\underset{\leftarrow}{\partial}\right)\Lambda\left(-\underset{\leftarrow}{\partial}\right) = -\frac{1}{4k_0^2}\left(\partial_\lambda^\lambda - k_0^2\right)\,; \quad (3)$$

∂_λ^λ désigne le dalembertien ; la raison d'être du facteur du dernier membre apparaîtra au n° II.3. Ils ont trouvé pour l'expression de cet opérateur

$$D\left(\underset{\rightarrow}{\partial}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k_0}\Big\{ a_\lambda \partial^\lambda + \frac{1}{k_0}\left(\partial_\lambda^\lambda - a_\lambda a_\mu \partial^{\lambda\mu}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{k_0^{p-1}} a_{\sigma_1} \dots a_{\sigma_{p-2}}\left(\partial_\lambda^\lambda - a_{\sigma_{p-1}} a_{\sigma_p} \partial^{\sigma_{p-1}\sigma_p}\right)\partial^{\sigma_1 \dots \sigma_{p-2}}$$
$$+ \dots \Big\}\,; \quad (4)$$

les $\sigma_1, \dots \sigma_p$ représentent une permutation avec répétition quelconque des $\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$; le développement s'arrête au terme d'ordre $p = 2s$, où s est la valeur du spin maximum en unités $h/2\pi$.

Ensuite, ils ont établi la formule générale de non-commutation des a_λ, du type Gupta [3] généralisée, qu'on lira dans leur article [6].

Il résulte de ce que la condition (3) a pu être satisfaite que l'équation de Gordon est conséquence des (1) ou (2) quel que soit le spin s. Ceci permet d'effectuer la transformation de Fourier covariante (I.15), et d'écrire pour la forme en k des (1) (sans constante multiplicative)

$$(a_\lambda k^\lambda - ik_0)\,\xi(k) = 0, \quad \bar{\xi}(k)\,(a_\lambda k^\lambda - ik_0) = 0. \quad (5)$$

Il résulte aussi de là que toutes les formules (I.12) à (I.47) subsistent pour les solutions des (1) ou (5).

II.2. Nouvelle écriture de l'égalité de Parseval covariante. — Un calcul simple, que nous avons donné [7], conduit à l'égalité de Parseval covariante

$$< \varphi^a|\varphi^b >_\sigma = < \xi^a|\xi^b >_\eta, \tag{6}$$

où φ^a et φ^b ou ξ^a et ξ^b désignent deux solutions différentes des (1) ou (5), et où l'on a les définitions suivantes du produit scalaire hermitien, sous la forme impliquant les matrices de spin :

$$< \varphi^a|\varphi^b >_\sigma = < \varphi^b|\varphi^a >^*_\sigma = i\iiint_\sigma \overline{\varphi}^a a^\lambda \varphi^b \, d\sigma_\lambda, \tag{7}$$

$$< \xi^a|\xi^b >_\eta = < \xi^b|\xi^a >^*_\eta = i\iiint_\eta \overline{\xi}^a a^\lambda \xi^b \, \varepsilon(k) \, d\eta_\lambda \, ; \tag{8}$$

σ désigne une hypersurface arbitraire du genre espace de l'espace-temps, et η l'hyperboloïde des quadrifréquences (ou des impulsions-énergies) ; ces produits scalaires hermitiens portent donc sur des fonctions de 4 variables liées par l'équation des ondes.

Entre autres conséquences de ces formules, en voici une qui présente de l'intérêt. La transformée de Fourier de $\overrightarrow{\partial^\lambda} \varphi$ étant $i\,k^\lambda \xi$ et celle de $\overline{\varphi}\,\overleftarrow{\partial^\lambda}$ étant $-\,ik^\lambda\overline{\xi}$, en utilisant la nouvelle expression (7) de $< \varphi| \varphi >$ et l'ancienne expression (1.32) de $<\xi|\xi >$, nous pouvons écrire (le premier membre étant indépendant de σ)

$$\frac{h}{4\pi}\iiint_\sigma \overline{\varphi}\, a^\lambda [\partial^\mu] \varphi \, d\sigma_\lambda = \frac{h}{2\pi}\iiint_\eta k^\mu \overline{\xi} \xi \, \varepsilon(k) \, d\eta \, ; \tag{9}$$

l'intégrand du premier membre est le tenseur inertique asymétrique de Tetrode ; $-\dfrac{ih}{4\pi}[\partial^\mu]$ est l'opérateur d'impulsion-énergie, et $\dfrac{h}{2\pi}k^\mu$ est la la valeur de l'impulsion-énergie attachée à une onde plane $\xi(k)$; nous avons donc, en (9), deux aspects différents de la valeur moyenne probable de l'impulsion-énergie de la particule portée par l'onde.

II.3. L'opérateur d'Umezawa et Visconti [6] est un projecteur. Relation du projecteur complémentaire avec l'opérateur des ondes. — Il suit de la formule (3) que l'opérateur $D(\partial)$ ou $D(k)$ transforme toute solution de l'équation de Gordon en une solution de l'équation de la particule à spin.

Reportons-nous alors à son expression (4) en y faisant $\partial^\lambda_\lambda = k_0^2$: en appliquant l'opérateur P ainsi obtenu à une solution $\varphi(x)$ de l'équation (1) de la particule à spin, nous trouvons immédiatement que $P\varphi = \varphi$. Autrement dit, l'opérateur

$$P(\overrightarrow{\partial}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k_0}\Big\{ a_\lambda \partial^\lambda + \frac{1}{k_0}(k_0^2 - a_\lambda a_\mu \partial^{\lambda\mu}) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{k^{p-1}} a_{\sigma_1} \ldots\ldots a_{\sigma_{p-2}} (k_0^2 - a_{\sigma_{p-1}} a_{\sigma_p} \partial^{\sigma_{p-1}\sigma_p}) \partial^{\sigma_1\ldots\sigma_{p-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\Big\}, \tag{10}$$

où équivalemment

$$P(k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k_0}\Big\{ ia_\lambda k^\lambda + \frac{1}{k_0}(k_0^2 + a_\lambda a_\mu k^\lambda k^\mu) + \ldots$$
$$+ \frac{i^p}{k^{p-1}} a_{\sigma_1} \ldots a_{\sigma_{p-2}} (k_0^2 + a_{\sigma_{p-1}} a_{\sigma_p} k^{\sigma_{p-1}} k^{\sigma_p}) k^{\sigma_1} \ldots k^{\sigma_{p-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\Big\}, \tag{11}$$

n'est autre que le projecteur projetant toute solution de l'équation de Gordon suivant une solution de l'équation de la particule à spin. En effet, si $\psi(x)$ ou $\zeta(k)$ désigne une solution de l'équation de Gordon, il suit de ce qu'on vient de dire que $P^2\psi = P\psi$ ou $P^2\zeta = P\zeta$, c'est-à-dire que, dans l'espace abstrait des solutions de l'équation de Gordon,

$$P^2 = P, \qquad \text{Q. E. D.} \tag{12}$$

Ceci nous donne un moyen simple d'obtenir la solution générale de l'équation de la particule à spin : il suffit d'appliquer l'opérateur $P(k)$ à une fonction $\xi(k)$ arbitraire sur l'hyperboloïde η des quadrifréquences, et nulle en dehors de η.

$1 - P$ est le projecteur complémentaire de P : il projette toute solution de l'équation de Gordon suivant une fonction orthogonale aux solutions de l'équation de la particule à spin. L'équation

$$(1 - P)\varphi(x) = 0 \text{ ou } (1 - P)\xi(k) = 0 \tag{13}$$

doit être réductible à l'équation (1) ou (5) de la particule à spin. Or, il résulte de la formule (10) ou (11) que P est un polynôme de degré $2s$ en Λ. De (13) nous concluons alors que $1 - P$ est un polynôme de degré $2s$ en Λ sans terme constant. Par exemple, en théorie de Dirac,

$$P(k) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2k_0}\gamma_\lambda k^\lambda, \tag{14}$$

$$1 - P(k) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2k_0}\gamma_\lambda k^\lambda = \Lambda(k), \tag{15}$$

et, en théorie de Kemmer,

$$P(k) = -\frac{1}{2k_0}(i\beta_\lambda k^\lambda + \beta_\lambda \beta_\mu k^\lambda k^\mu), \tag{16}$$

$$1 - P(k) = \Lambda(k)(2\Lambda(k) + 3). \tag{17}$$

II.4. Nouvelle écriture des intégrales covariantes réciproques [7] de Fourier. — $\psi(x)$ ou $\xi(k)$ désignant une solution de l'équation de Gordon et $\varphi(x)$ ou $\zeta(k)$ une solution de l'équation de la particule à spin, il résulte de ce qui précède les relations

$$< \psi|\varphi >_\sigma = < P\psi|\varphi >_\sigma = < \psi|P\varphi >_\sigma, \quad (18)$$

$$< \zeta|\xi >_\eta = < P\zeta|\xi >_\eta = < \zeta|P\xi >_\eta ; \quad (19)$$

les produits scalaires hermitiens restent définis au sens (I.31) et (I.32), et le sens de $P\psi$ ou $P\zeta$ écrit à gauche de la barre est celui-ci : dans un produit de matrices a (hermitiennes) et ψ ou ζ, l'ordre des matrices est inversé, ψ ou ζ remplacé par $\bar\psi$ ou $\bar\zeta$, $\overrightarrow{\partial}$ par $-\overleftarrow{\partial}$ et k par k. Incidemment, nous avons montré que P est bien un opérateur self-adjoint au sens de la norme non définie positive impliquée dans (I.31) ou (I.32).

Appliquons respectivement les formules (18) et (19) aux transformations de Fourier (I.34) et (I.35) ; il vient

$$\varphi(x) = < e(-kx)|P\xi\, k) >_\eta = < Pe(-kx)|\xi(k) >_\eta, \quad (20)$$

$$\xi(k) = < e(kx)|P\varphi(x) >_\sigma = < Pe(kx)|\varphi(x) >_\sigma ; \quad (21)$$

sous les dernières formes, $Pe\ (\pm kx)$ est solution de l'équation de la particule à spin, en sorte que ces dernières formes s'entendent aussi au nouveau sens (7) et (8). Rappelons la définition de la fonction $e(kx)$ (équation I.7) :

$$e(kx) = e^*(-kx) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2}\, e^{ik^\lambda x_\lambda} & \text{si } k^\lambda k_\lambda + k_0^2 = 0, \\ 0 & \text{si } k^\lambda k_\lambda + k_0^2 \neq 0. \end{cases} \quad (22)$$

II.5. Nouvelle écriture de la formule résolvant le problème de Cauchy et de la formule analogue du 4-espace k. — En faisant, dans (I.42), $\psi = \varphi = P\varphi$, l'on obtient la formule

$$\varphi(x) = < P(\partial')\, D(x - x')|\varphi(x') >_{\sigma'} \quad (23)$$

qui, entendue au nouveau sens (7), ne contient plus la dérivée normale du φ sur σ', mais contient à la place une combinaison linéaire des composantes du φ ; dans le cas du spin 1/2, cette formule coïncide avec celle donnée par Schwinger [5].

De (I.39), (I.41), ainsi que de la définition (I.40), nous déduisons

$$\begin{aligned} &< P(\partial)\, D(x - x')|P(\partial)\, D(x - x'') >_\sigma \\ &= < P(k)\, e(-kx')|P(k)\, e(-kx'') >_\eta = P(\partial')\, D(x' - x'') \\ &\qquad = P(\partial'')\, D(x'' - x') ; \end{aligned} \quad (24)$$

ceci établit, au nouveau sens (7) et (8), l'orthogonalité des propagateurs de la particule à spin $PD\,(x - x')$ attachés à des x' séparés par un intervalle du genre espace, ainsi que celle des $Pe\,(-kx')$ homologues dans l'espace des k.

Semblablement, en faisant dans (I.47) $\zeta = \xi = P\xi$, l'on obtient la formule

$$\xi(k) = < PD(k, k')|\xi(k') >_\eta, \quad (25)$$

qui peut être entendue au nouveau sens (8), avec, comme précédemment, d'après (I.45),

$$\begin{aligned} &< P(k)\, D(k, k')|P(k)\, D(k, k'') >_\eta \\ &= < P(\partial)\, e(k'x)|P(\partial)\, e(k''x) >_\sigma = P(k'')\, D(k', k'') \\ &\qquad = P(k')\, D(k', k'') ; \end{aligned} \quad (26)$$

rappelons que la fonction $D\ (k', k'')$ est réelle et invariante par échange de k' et k''. Ceci établit l'orthogonalité, au nouveau sens (7) et (8), de deux fonctions de k, $PD\ (k, k')$ attachées en deux points k' différents de l'hyperboloïde η, ainsi que celle de deux ondes planes monochromatiques à spin $Pe(k'\ x)$ différant par leurs quadrifréquences.

Notons au passage la formule

$$< P(\partial)\, D(x - x')|1 >_{\sigma'} = 1 \quad (27)$$

où x est pris sur σ' ; la formule analogue dans le 4 - espace k n'a pas un second membre aussi simple, car on ne peut pas choisir arbitrairement toutes les composantes d'une onde plane monochromatique.

Saisissons cette occasion d'indiquer les formules analogues dans le formalisme de l'équation de Gordon, que nous avions omises dans notre précédent article [7], et que nous écrivons ici sous forme explicite :

$$\frac{i}{2k_0}\iiint_\sigma \partial^\lambda D(x' - x)\, \mathrm{d}\sigma_\lambda(x) = 1, \quad (29)$$

$$\iiint_\eta D(k', k)\, \varepsilon(k)\, \mathrm{d}\eta = 1 ; \quad (30)$$

rappelons que $D(x' - x)$ désigne le propagateur de Jordan-Pauli, répondant à la définition (I.40).

II.6. Le cas de la particule vectorielle de spin 1 (photon de L. de Broglie [1], méson vectoriel). — On sait que, sous forme tensorielle, les équations de la particule de spin 1 dérivent toutes de l'équation de propagation du potentiel

$$(\partial_\lambda^\lambda - k_0^2)A_\mu = 0 \quad (31)$$

et de la condition de Lorentz

$$\partial^\lambda A_\lambda = 0. \quad (32)$$

Nous allons montrer que, si (31) représente évidemment la forme vectorielle de l'équation de Gordon, (32) joue ici le rôle de l'équation de la particule à spin, et que le projecteur correspondant est l'opérateur

$$P^{\lambda\mu} \equiv \delta^{\lambda\mu} - \frac{1}{k_0^2}\, \partial^{\lambda\mu} \quad (33)$$

figurant dans les formules de non-commutation des A_λ de M. L. de Broglie.

En effet, l'on vérifie très aisément 1° que l'opérateur $P^{\lambda\mu}$ appliqué à tout quadrivecteur B_μ solution de l'équation de Gordon le transforme en un quadrivecteur

$$A_\lambda = P_{\lambda\mu} B^\mu \tag{34}$$

satisfaisant à la condition de Lorentz, et 2° que $P^2 = P$ en ce sens que

$$P_{\lambda\mu} P^{\mu\nu} = P^\nu_\lambda. \tag{35}$$

Rappelons que la condition de Lorentz de forme stricte (32) est compatible avec la théorie du photon à $k_0 \neq 0$ de M. L. de Broglie, incluant les formules de non-commutation de l'auteur, tandis qu'elle ne l'est pas avec la forme usuelle de la théorie quantique des champs.

III. — Particule plongée dans un champ : complément à notre précédente théorie [7].

L'on sait [4] que si l'on veut avoir, dans ce cas qui, en théorie superquantifiée, est celui de la représentation de Heisenberg, un formalisme covariant des intégrales réciproques de Fourier (ce qui est nécessaire, notamment, pour pouvoir appliquer les règles de Feynman [2] à l'émission-absorption dipolaires, à l'effet Raman, etc...) le recours aux intégrales quadruples est indispensable. Nous avons étudié la question en détail [7], mais c'est seulement dans le cas particulier du champ extérieur conservatif que nous avons vérifié l'équivalence entre la définition nouvelle de l'orthogonalité de deux solutions de l'équation des ondes

$$\iiiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}^a \psi^b \, dx^4 = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\xi}^a \xi^b \, dk^4 = 0 \tag{36}$$

et la définition classique

$$i \iiint_\sigma \overline{\psi}^a a_\lambda \psi^b \, d\sigma^\lambda = 0 \, ; \tag{37}$$

nous voulons établir ici cette équivalence en toute généralité.

Effectuons la transformation unitaire de Schwinger [5] qui ramène au cas de la représentation d'interaction, c'est-à-dire au cas des équations de la particule libre ; les expressions (36) et (37) resteront invariantes mais, en vertu de ce qui précède et de ce que nous avons démontré dans notre article antérieur, (37) vient en coïncidence avec

$$\iiint_\eta \overline{\xi}^a \xi^b \varepsilon(k) \, d\eta = 0, \tag{38}$$

dont, au commutateur de signe ε(k) près, l'intégrand est semblable à celui de (36_2).

Pour nous débarrasser du ε(k), restreignons-nous aux solutions ψ ou ξ qui, une fois transformées au cas de la particule libre, ont leurs fréquences d'un signe déterminé ; alors, les deux définitions, classique (37), et nouvelle (36), de l'orthogonalité seront équivalentes. Ce résultat n'est pas sans importance, car la définition classique est utilisée, notamment, dans la théorie de l'atome hydrogénoïde, tandis que la définition nouvelle est impliquée dans les règles de Feynman [2] appliquées aux cas, par exemple, de l'émission — absorption dipolaire, de l'effet Raman, etc...

Rappelons qu'un problème de normalisation, que nous avons discuté [7], se présente en liaison avec l'usage de la formule (36) au lieu de (37).

Manuscrit reçu le 20 mars 1956.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Broglie (L. de), Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, Paris, 1949.
[2] Feynman (R. P.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.
[3] Gupta (S. N.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 1334-1341.
[4] Lévy (M.), *Proc. Roy. Soc.*, 1950, **204**, 149.
[5] Schwinger (J.), *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439-1461.
[6] Umezawa (H.) et Visconti (A.), Nuclear Physics, 1956, **1**, 20-32.
[7] Costa de Beauregard (O.), *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 770-780.
[8] Costa de Beauregard (O.), Comptes Rendus 1956 242, 1681 et 1692.