

COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

III.

ADAPTATION A NOTRE FORMALISME [4] DE LA THÉORIE DE VON NEUMANN [7].
LE PROBLÈME DE L'IRRÉVERSIBILITÉ MACROSCOPIQUE.

Par M. O. COSTA DE BEAUREGARD,

Institut Henri-Poincaré, Paris.

I. Introduction. — Nous poursuivons ici le développement de la forme totalement covariante relativiste, mais non superquantifiée, de la mécanique ondulatoire, exposée dans deux précédentes études [4]. En ce qui concerne la forme superquantifiée de cette théorie, nous adhérons entièrement au beau formalisme que développe en ce moment R. Potier [9].

L'une des clés de notre théorie est de ne définir le produit scalaire hermitien, et par conséquent l'espace de Hilbert, que pour l'ensemble des solutions de l'équation des ondes. Que la particule associée à l'onde soit libre ou plongée dans un champ imposé, nous définissons le produit scalaire hermitien de deux ondes φ (fonctions de 4 variables liées par l'équation des ondes) au moyen de l'intégrale triple, invariante relativiste et conservative, étendue à une hypersurface arbitraire du genre espace,

$$\langle \varphi^a | \varphi^b \rangle = \langle \varphi^b | \varphi^a \rangle^* = i \iiint_{\sigma} \bar{\varphi}^a a^\lambda \varphi^b d\sigma_\lambda, \quad (1)$$

où les a^λ désignent les 4 matrices de spin du φ (1).

L'expression de la norme correspondant à la formule (1) est évidemment

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle = i \iiint_{\sigma} \varphi a^\lambda \varphi d\sigma_\lambda; \quad (2)$$

il est bien connu que, sauf dans le cas du spin 1/2 (théorie de Dirac), cette norme n'est pas définie positive; toutefois, la séparation des φ en deux classes, ceux à norme positive et ceux à norme négative, est invariante relativiste, et, pour chacune

(1) Lorsqu'il y a un champ extérieur imposé, l'on sait [6, 4] que les intégrales réciproques de Fourier ne peuvent être définies de manière covariante relativiste qu'au moyen d'intégrales quadruples; ces intégrales sont essentielles à la théorie de Feynmann [5]. Toutefois, R. Potier nous a fait observer, à juste titre, qu'en les introduisant, nous nous écartons de notre principe de n'utiliser que des fonctions solutions de l'équation des ondes, et que l'usage des ondes planes en théorie de la particule non libre est au moins partiellement responsable des divergences de la théorie.

En bref, le formalisme des intégrales de Fourier quadruples, pour la particule non-libre, est suggestif et commode, mais probablement inessentiel. Pour cette raison, nous basons toute notre étude d'aujourd'hui sur l'intégrale triple (1).

des deux classes séparément, la théorie habituelle de l'espace de Hilbert est possible. Nous n'avons pas examiné ce qu'il convient de dire exactement pour le cas frontière exceptionnel où la norme est nulle.

II. Adaptation à notre formalisme de la théorie de la mesure physique de J. Von Neumann [7]. — Soit une variété linéaire fermée (v. l. f.) (E) sous-tendue par un ensemble de solutions φ de l'équation des ondes, E le projecteur correspondant.

D'après l'axiomatique de Von Neumann [7], à E est associée biunivoquement une certaine opération de mesure qu'on peut effectuer sur le φ . Celle-ci est assimilée à une *question bien posée* au φ par l'appareillage, question susceptible des seules réponses *oui* ou *non*, respectivement figurées par les valeurs propres 1 et 0 du projecteur E .

En général, lorsqu'on s'est donné arbitrairement d'une part la solution $\varphi(x)$, $x = x_1, x_2, x_3, x_4$, de l'équation des ondes, et d'autre part la v. l. f. (E) ou, ce qui revient au même, le projecteur E , le φ n'est fonction propre ni de E , ni du projecteur complémentaire $1 - E$; il revient au même de dire que φ n'est ni contenue dans (E), ni orthogonale à (E) ou contenue dans $(1 - E)$; la v. l. f. (1) désigne ici l'espace de Hilbert tout entier. Soit alors Φ le projecteur élémentaire associé à φ , et considérons l'expression aux diverses formes, toutes utiles,

$$W_E = \langle \varphi | E | \varphi \rangle = \|E\varphi\|^2 = \sum c_i^* c_i \\ = \sum \langle \varphi | \Phi | \varphi \rangle = \text{trace } E\Phi = \text{trace } \Phi E; \quad (3)$$

pour passer de la première à la seconde forme, il suffit de se souvenir des propriétés d'hermiticité et d'itération ($E^2 = E$) des projecteurs; les expressions suivantes se démontrent aisément si l'on se donne une base orthogonale complète φ_i dans (E); les c_i désignent les coefficients du développement du φ sur cette base.

L'expression W_E jouit des deux propriétés suivantes :

$$0 < W_E < 1, \quad (4)$$

$$W_{1-E} = \langle \varphi | 1 - E | \varphi \rangle \\ = \langle \varphi | \varphi \rangle - \langle \varphi | E | \varphi \rangle = 1 - W_E; \quad (5)$$

il est donc permis de poser en principe que W_E représente la probabilité d'une réponse « oui » à la question « E ? », et $1 - W_E \equiv W_{1-E}$ la probabilité d'une réponse « non » à cette même question.

La question « E ? » peut être posée soit en prédiction, soit en rétrodictio, c'est-à-dire : le φ étant donné avant son interaction avec l'appareil de mesure caractérisé par E , quelle est la probabilité pour que le nouveau φ émergeant de l'opération de mesure soit contenu dans (E) ? Ou bien : le φ étant donné après son interaction avec l'appareil de mesure caractérisé par E , quelle est la probabilité pour que l'ancien φ incident sur l'appareil de mesure ait été contenu dans (E) ? Les deux problèmes sont exactement symétriques ; le premier fait intervenir les ondes retardées divergeant du dispositif de mesure, et le second les ondes avancées convergeant sur le dispositif de mesure.

Dans le cas général où $W \neq 0$ et $\neq 1$, l'opération de mesure provoque une transition quantique. Le nouveau φ (cas de la prédiction) ou l'ancien φ (cas de la rétrodictio) est, avec l'alternative possible, caractérisé par les formules,

$$\text{réponse oui : } W'_E = 1 \text{ ou } \varphi' = E\varphi, \quad (6)$$

$$\text{réponse non : } W'_E = 0 \text{ ou } E\varphi' = 0. \quad (7)$$

III. Application au problème de la mesure d'une grandeur physique. — Il semble inévitable de postuler que les valeurs que peut prendre une grandeur mesurable sont essentiellement des nombres réels, dont le domaine des valeurs s'étend en général de $-\infty$ à $+\infty$. Soit alors $W(r_1, r_2)$ la probabilité d'une réponse affirmative à la question : « La valeur r de telle grandeur $\mathcal{R}$ est-elle comprise dans l'intervalle r_1, r_2 , avec $r_1 \leq r_2$? » D'après le principe de l'addition des probabilités partielles, et si r_1, r_2, r_3 désignent trois nombres formant une suite non décroissante, on doit avoir

$$W(r_1, r_3) = W(r_1, r_2) + W(r_2, r_3); \quad (8)$$

d'après la définition même de la probabilité, l'on doit avoir

$$W(-\infty, +\infty) = 1. \quad (9)$$

Si ces conditions sont satisfaites, on sait définir une fonction de distribution telle que

$$W(r_2) \geq W(r_1) \quad \text{si} \quad r_2 \geq r_1, \quad (10)$$

$$W(-\infty) = 0, \quad W(+\infty) = 1, \quad (11)$$

et telle qu'on ait identiquement

$$W(r_1, r_2) = W(r_2) - W(r_1). \quad (12)$$

D'après ce qui précède, nous devons associer à la question considérée un projecteur variable $E(r_1, r_2)$, et par conséquent, à la fonction de distri-

bution $W(r)$, une famille continue de projecteurs $E(r)$ satisfaisant aux conditions

$$E(r_2) \geq E(r_1) \quad \text{si} \quad r_2 \geq r_1, \quad (13)$$

$$E(-\infty) = 0, \quad E(+\infty) = 1, \quad (14)$$

de telle manière que nous puissions poser

$$W(r) \equiv \langle \varphi | E(r) | \varphi \rangle = \|E(r) \varphi\|^2 = \text{trace } E(r) \Phi. \quad (15)$$

Mais une telle famille de projecteurs caractérise, selon Von Neumann [7], un opérateur linéaire hermitien R satisfaisant à la définition symbolique

$$R \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} r dE(r), \quad (16)$$

ou, plus explicitement, l'intégrale étant une intégrale de Stieltjes et les deux fonctions φ appartenant à l'espace de Hilbert,

$$\langle \varphi | R | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r d \langle \varphi | E(r) | \varphi \rangle. \quad (17)$$

Par définition même, la valeur moyenne probable de la grandeur $\mathcal{R}$ produite par la mesure correspondante sera

$$r = \int_{-\infty}^{+\infty} r dW(r), \quad (18)$$

c'est-à-dire

$$\bar{r} = \langle \varphi | R | \varphi \rangle. \quad (19)$$

EXEMPLES D'APPLICATION. — Considérons le problème de la localisation d'un corpuscule à la traversée d'une hypersurface du genre espace σ , c'est-à-dire à un « pseudo-instant » σ : nous pouvons carroyer σ au moyen de 3 familles continues de surfaces coordonnées, repérées par les valeurs monotones de 3 paramètres réels variant de $-\infty$ à $+\infty$, et nous ramener ainsi au schéma général précédent. Évidemment, les 3 opérateurs hermitiens ainsi introduits seront beaucoup plus compliqués que les $x \times$ valables dans le cas où σ est un hyperplan rapporté à des coordonnées cartésiennes.

Un autre exemple sera, dans le cas d'un corpuscule libre, la mesure de 3 des 4 composantes de l'impulsion-énergie (dont la longueur est imposée). Cette mesure ne peut pas être considérée comme faite dans un pseudo-instant sans épaisseur : elle nécessite, par exemple, le passage du corpuscule à travers deux ouvertures séparées par un intervalle du genre temps. Mais, ceci étant admis, le schéma général est celui précédemment défini.

IV. Introduction des collectifs. — Soit toujours Φ le projecteur élémentaire associé à la solution $\varphi(x)$ de l'équation des ondes, et considérons une base orthogonale complète formée par de tels φ . A chaque φ_i attachons un poids statistique ω_i ,

$0 \leq \omega_i \leq 1$, et définissons, avec Von Neumann [7], l'opérateur statistique

$$S \equiv \sum \omega_i \Phi_i; \quad (20)$$

si les ω_i ne sont pas tous égaux entre eux, S n'est pas un projecteur ; mais c'est un opérateur à valeurs propres ω_i toutes ponctuelles et positives (comme on le voit en comparant (20) à (16)), c'est-à-dire, d'après la théorie générale [7], un opérateur hermitien *complètement continu et défini positif*.

En probabilités normées, l'on a

$$0 < \omega_i < 1, \quad \sum \omega_i = 1; \quad (21)$$

l'on voit alors, en se souvenant que la trace d'un projecteur élémentaire Φ vaut 1, que l'opérateur statistique est normé suivant

$$\text{trace } S = 1. \quad (22)$$

Si les ω_i sont tous différents entre eux, c'est-à-dire si toutes les valeurs propres de S sont simples, le collectif est dit *complètement séparable*. Si plusieurs ω_i sont égaux entre eux, la valeur propre ω_i est multiple, et le sous-collectif des ω_i correspondant est dit *inséparable* ; le sous-opérateur $\omega_i \sum \Phi_i$ est le projecteur attaché à la v. l. f. des Φ_i ; à lui seul, ce cas (courant lors d'une mesure) justifie l'introduction des collectifs. Dans le cas extrême d'un mélange à poids égaux d'un système complet de fonctions orthonormales de l'espace de Hilbert, l'on dit le collectif *complètement inséparable* ; l'opérateur statistique d'un tel collectif est l'opérateur unité ; en probabilités normées, il sera affecté d'un coefficient infiniment petit.

Supposons qu'on pose, soit en prédiction, soit en rétrodiction, la même question « E ? » à tous les systèmes d'un collectif. La probabilité d'une réponse *oui* sera

$$W_E = \sum \omega_i \text{trace } \Phi_i E = \sum \text{trace } \omega_i \Phi_i E, \quad (23)$$

c'est-à-dire

$$W_E = \text{trace } SE = \text{trace } ES; \quad (24)$$

s'il s'agit de la mesure numérique d'une grandeur physique, on aura pour la fonction de distribution,

$$W(r) = \text{trace } SE(r) = \text{trace } E(r) S \quad (25)$$

et, pour la valeur moyenne probable,

$$\bar{r} = \text{trace } SR = \text{trace } RS. \quad (26)$$

V. Équivalence entre les principes macroscopiques de l'entropie croissante et des ondes retardées. — THÉORÈME. — *Étant donné un collectif de solutions de l'équation des ondes caractérisé par un opérateur statistique S et une opération de mesure physique soit antérieure, soit postérieure, caractérisée par un projecteur E , l'opérateur statistique S' du collectif créé à partir de S soit en prédiction, soit en rétrodiction, par la transition de mesure, a toutes ses*

valeurs propres ω'_i inférieures à la plus grande valeur propre p de S .

En effet, le poids statistique du cas pur Φ_i est, soit en prédiction, soit en rétrodiction,

$$\omega'_i = \text{trace } S \Phi_i = \langle \Phi_i | S | \Phi_i \rangle. \quad (27)$$

Remplaçant S par sa définition (20), et introduisant les coefficients du développement du Φ_i sur les Φ_j , l'on peut écrire successivement

$$\omega'_i = \sum_j \omega_j \langle \Phi_i | \Phi_j | \Phi_i \rangle = \sum_j c_{ij}^* c_{ij} \omega_j; \quad (28)$$

majorant tous les ω_i par leur borne supérieure p et tenant compte de l'identité

$$\sum c_{ij}^* c_{ij} = 1, \quad (29)$$

il vient, comme on l'annonçait

$$\omega'_i < p. \quad (30)$$

L'importance de ce résultat mérite un commentaire. Si l'on se donne un état initial du collectif caractérisé par des poids ω_i différents des diverses fonctions d'onde orthonormales Φ_i , il est probable qu'une mesure effectuée ultérieurement sur ce collectif tendra à égaliser les poids ω'_i des nouvelles fonctions d'onde Φ'_i ; c'est la tendance vers l'homogénéité, bien connue de la mécanique statistique. Mais, si l'on suppose maintenant que le collectif en observation a émergé d'une opération de mesure effectuée sur un collectif antécédent, la formule (30) affirme que ce collectif antécédent était probablement plus homogène que celui qu'on a en mains ; cela est manifestement contraire aux faits expérimentaux.

Mais il est bien connu que le même paradoxe existe en calcul des probabilités et en mécanique statistique classiques. La preuve que l'usage en rétrodiction de la formule de probabilité convenant pour la prédiction n'y est pas satisfaisant, est la nécessité de recourir à la formule de probabilité des causes de Bayes, comportant un jeu de coefficients estimés *extrinsèquement* à l'évolution spontanée du système en étude. Or, que sont les coefficients arbitraires de Bayes, sinon une manière de tenir compte de l'interaction du système en étude avec le reste de l'univers ? Il apparaît donc qu'une application brutale de la statistique à l'évolution interne d'un système est satisfaisante en prédiction, mais non pas en rétrodiction ; *en rétrodiction, l'on n'a pas le droit de négliger l'interaction du système en étude avec le reste de l'univers.*

La même situation se retrouve en mécanique statistique proprement dite, la discussion correspondante étant au fond celle qu'il faut faire pour résoudre le paradoxe bien connu de Loschmidt. Pour éviter le recours aux notions assez élaborées impliquées dans les diverses versions du « théorème H », raisonnons sur un modèle volontairement très schématisé. L'on sait que, pour étudier le

phénomène de la distribution uniforme des petites planètes sur leur orbite commune, Poincaré [8] idéalise le problème en supposant l'orbite circulaire, et en assimilant l'essaim à un fluide continu. Si a désigne le moyen mouvement et b la longitude initiale d'une petite planète, $f(a, b)$ la densité de distribution attachée au point a, b , Poincaré remarque que, quelle que soit la fonction f supposée simplement continue, l'expression

$$M(t) \equiv \iint e^{it(a+b)} f(a, b) da db$$

tend vers zéro lorsque le temps $t \rightarrow +\infty$; autrement dit, et par exemple, quelle que soit la loi de l'éclatement initial d'une grosse planète, l'essaim des petites planètes engendrées tendra vers l'homogénéité. Ce qui fait le paradoxe (non soulevé par Poincaré) c'est que, si $t \rightarrow -\infty$, $M(t) \rightarrow 0$ de la même manière. Devrons-nous conclure de là que la grosse planète observée à l'instant zéro est née du rassemblement d'un essaim homogène de petites planètes? Évidemment non. Mais il est clair que la seule manière d'écarter le paradoxe est de *poser en principe* que la mécanique statistique est faite pour être appliquée telle quelle en prédiction, mais non en rétrodictio. C'est dans ce postulat de base (souvent implicite), et nulle part ailleurs, que réside l'irréversibilité décrite par la mécanique statistique. Quant à l'interprétation physique de cette règle impérative d'emploi, elle est manifeste : la situation hétérogène observée à l'instant zéro n'est jamais donnée par l'évolution spontanée du système (c'est ce qu'on vient de dire), mais elle résulte toujours de l'interaction momentanée de ce système avec un autre système. La conclusion est donc exactement la même que celle précédemment donnée à propos du calcul abstrait des probabilités.

Envisagée sous l'aspect de l'interaction pendant une durée Δt finie entre deux systèmes, antérieurement et postérieurement séparés, la précédente règle d'emploi de la mécanique statistique équivaut à un *principe des actions retardées* : l'interaction momentanée donne chacun des deux systèmes dans un état improbable qui est le début d'une évolution, elle ne les cueille pas dans un état improbable qui serait le terme d'une évolution. Autrement dit, lorsque la mécanique statistique déduit, classiquement, la loi de l'entropie croissante, elle le fait en s'appuyant (généralement sans le dire) sur le principe des actions retardées. Mais, réciproquement, sous son aspect présentement discuté, la loi des actions retardées est à son tour conséquence du principe de l'entropie croissante, car le choc des deux systèmes considérés tend à réaliser l'équipartition des énergies cinétiques (évaluées dans le référentiel du centre de gravité).

Nous sommes ainsi préparés à l'idée que les deux principes, macroscopiques, de l'entropie croissante et des actions retardées, sont mutuellement équivalents,

l'un quelconque d'entre eux pouvant être déduit de l'autre. Or c'est exactement là le résultat contenu dans la démonstration qui aboutit à la formule (30) de Von Neumann. Si nous raisonnons en prédiction, nous utilisons par hypothèse les ondes retardées, et nous concluons à la loi de la croissance de l'entropie⁽²⁾; le principe des ondes retardées s'applique aux intervalles de temps pendant lesquels le système évolue spontanément, la loi de l'entropie croissante aux extrémités des intervalles de transition, ou d'interaction avec l'appareillage. Si, au contraire, nous raisonnons « aveuglément » [11] en rétrodictio, nous utilisons par hypothèse les ondes avancées, et nous concluons à une loi de décroissance de l'entropie.

En bref, dès l'instant où l'on raisonne sur des ondes quantifiées, l'on démontre, en théorie des collectifs de Von Neumann, l'équivalence entre les deux principes des ondes retardées et de l'entropie croissante. Si l'on remarque que la mécanique de base n'est plus aujourd'hui la mécanique newtonienne, mais bien la mécanique ondulatoire, l'on verra là une démonstration très générale de l'équivalence des deux principes de l'entropie croissante et des actions retardées (qui résultait, en théorie classique, des arguments purement épistémologiques donnés plus haut).

VI. La description minkowskienne des phénomènes et l'équivalence entre information et entropie. — Il ressort clairement de ce qui précède que la réponse à l'argument de Loschmidt et à tous les paradoxes similaires (qui sont, techniquement parlant, absolument inattaquables) réside en l'expression de deux faits physiques :

A. *Aucun système partiel n'est suffisamment isolé du reste de l'univers (et en particulier de l'expérimentateur) pour laisser libre cours à la symétrie entre passé et futur des lois élémentaires.*

B. *Si toutes les évolutions partielles ont la même flèche (bien connue), en vertu de laquelle un état très improbable se défait spontanément, mais ne se fait pas spontanément, c'est essentiellement parce que toutes ces évolutions partielles subissent l'empreinte de l'évolution du tout de l'univers.*

Un autre manière de dire la même chose est que l'irréversibilité des phénomènes s'exprime non dans leurs lois élémentaires d'évolution, mais dans leurs conditions aux limites globales : remonter à l'origine de l'irréversibilité, c'est donc reculer jusqu'à la considération du tout de l'univers. Le phénomène de l'irréversibilité physique offre un exemple carac-

(2) Introduire explicitement l'entropie dans les formules ne fait qu'alourdir le calcul sans ajouter rien de substantiel sous l'angle de la discussion actuelle. Le lecteur intéressé pourra se référer au calcul de J. von Neumann [7, chap. V, § 3].

téristique d'une détermination de la partie par le tout.

Notre théorie étant essentiellement covariante relativiste, nous sommes obligés d'employer un langage minkowskien. Là où un Poincaré se demandait encore pourquoi l'univers va, dans le temps, vers ses états les plus probables et n'en vient pas, nous devons rejeter ce langage prérelativiste devenu inadéquat. Dans l'espace-temps de Minkowski, nous avons une succession (largement arbitraire) d'hypersurfaces σ du genre espace, et le fait est que celles-ci sont ordonnées suivant des valeurs monotones de l'entropie. La question est alors « Pourquoi le temps des expérimentateurs, et, plus généralement, celui des êtres doués de psychisme et capables d'action, explore-t-il la 4^e dimension de l'espace-temps dans le sens qui fait apparaître l'entropie comme croissante et les ondes comme retardées, et non pas dans le sens contraire ? »

Il est possible de formuler un principe qui rende compte de cet état de choses, et, cela, grâce à l'équivalence entre information et entropie élucidée notamment par L. Brillouin [2] et par J. Rothstein [10] (et, du reste, directement évidente sur

les formules de la théorie de Von Neumann). L. Brillouin a montré que toute information acquise dans une expérience macroscopique doit être payée de la dépense d'une « néguentropie » naturellement existante au moins égale. Réciproquement, la possession d'une certaine quantité d'information permet d'effectuer un acte physique entraînant une diminution de l'entropie existante, mais la « néguentropie » ainsi produite est toujours inférieure à l'information dépensée à cet effet. Il n'est pas interdit de penser (et L. Brillouin lui-même l'a suggéré) que ce modèle « cybernétique » représente un schéma simplifié du fonctionnement d'un être vivant doué de psychisme.

L'énoncé du principe que nous cherchions saute alors aux yeux : *c'est un principe de croissance de l'information d'origine expérimentale macroscopique*. Ainsi, c'est par définition même que les êtres doués de psychisme, et en particulier les physiciens expérimentateurs, sont *obligés* d'explorer dans le sens descendant la courbe de la néguentropie universelle. C'est ce qu'avait déjà dit Boltzmann [1], dans un temps où l'on ne connaissait encore ni la théorie de la relativité, ni la cybernétique.

Manuscrit reçu le 14 février 1957.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOLTZMANN (L.), Leçons sur la théorie des gaz (trad. Gallotti), Paris, 1902, ch. VII § 89 et 90.
- [2] BRILLOUIN (L.), Science and Information Theory, New-York, 1956.
- [3] COSTA DE BEAUREGARD (O.), *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **241**, 1721 ; 1956, **243**, 1728 et 1838.
- [4] COSTA DE BEAUREGARD (O.), *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 770-780 et 1956, **17**, 872-875.
- [5] FEYNMAN (R. P.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.
- [6] LÉVY (M.), *Proc. Roy. Soc.*, 1950, **204**, 149.
- [7] NEUMANN (J. von), Les fondements mathématiques de la mécanique quantique (trad. Proca), Paris, 1946.
- [8] POINCARÉ (H.), Calcul des probabilités (2^e éd.), Paris, 1912, chap. VII n° 93.
- [9] POTIER (R.), *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 688-692 ; *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 470, 878, 1694, 1961 ; *J. Physique Rad.*, (sous presse).
- [10] ROTHSTEIN (J.), *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 135.
- [11] WATANABE (S.), *Rev. Mod. Physics*, 1955, **27**, 26-39, 40-76, 179-186.