

Olivier Costa de Beauregard

LA CAUSALITE IDENTIFIEE  
A LA PROBABILITE CONDITIONNELLE ET  
LA NON-SEPARABILITE QUANTIQUE

1. LAPLACE, 1974:  
INVERSION DE LA PROBABILITE CONDITIONNELLE.  
CHAINES DE MARKOV

Laplace, dans son célèbre mémoire sur les probabilités des causes, introduit la réversibilité de droit et l'éventuelle irréversibilité de fait des probabilités conditionnelles. Dans cet énoncé très général aucune connotation temporelle, spatiale, ni spatio-temporelle n'est essentiellement attachée aux occurrences aléatoires associées; par exemple, on peut envisager la probabilité que l'un quelconque de  $N$  entiers pris au hasard soit un nombre premier. L'énoncé de Laplace englobe celui de la symétrie passé-futur de droit et de la dissymétrie de fait des probabilités de transition discuté un siècle plus tard par Loschmidt [1] et Boltzmann [2]. Il importe de préciser exactement de quoi il s'agit.

Une expression fondamentale [3] du principe de Bayes-Laplace est

$$(1) \quad P(i \cap f) = P(f | i) P(i) = P(i | f) P(f)$$

où  $P(i \cap f)$  note la *probabilité jointe* et  $P(f | i)$  et  $P(i | f)$  les *pro-*

probabilités conditionnelles inverses de deux occurrences aléatoires  $i$  et  $f$ ; on a fait jouer la symétrie intrinsèque de la probabilité  $P(i \cap f)$ .

Les probabilités conditionnelles réciproques  $P(f|i)$  et  $P(i|f)$  ne sont égales elles que si  $P(i) = P(f)$ , et c'est sur cette remarque qu'est fondée la discussion d'une éventuelle "asymétrie de fait". On clarifie la question en introduisant la *probabilité de transition*

$$(2) \quad (f|i) = (i|f)$$

au moyen de la formule  $[P_i \equiv P(i), P_f \equiv P(f)]$

$$(3) \quad P(i \cap f) = P_f(f|i) P_i = P_i(i|f) P_f.$$

L'égalité (2) exprime une transposition matricielle [la matrice  $(i|f)$  n'étant nécessairement ni symétrique, ni même carrée]. Aucune connotation temporelle, ni spatiale, ni spatio-temporelle n'est nécessairement attachée aux occurrences aléatoires  $i$  et  $f$ ; si celles-ci appartiennent à deux ensembles aux membres mutuellement exclusifs

$$(4) \quad (i|i') = \delta(i, i'), \quad (f|f') = \delta(f, f'),$$

la *transition* exprimée par la formule (3) est entre deux *représentations* du système.

Notant  $n_i$  et  $n_f$  les nombres d'occupation entiers des états  $i$  et  $f$ , on peut récrire (3) suivant

$$(5) \quad n(i \cap f) = n_f(f|i) n_i = n_i(i|f) n_f,$$

$n$  étant alors le *nombre de chances joint* des occurrences  $i$  et  $f$ .

Juste pour montrer l'efficacité de cette approche, je l'applique au problème élémentaire des boules cachées dans des urnes. On a des urnes différant au plus par leurs couleurs –  $n_i$  urnes de couleur  $i$  – et des boules différant au plus par leurs couleurs –  $n_f$  boules de couleur  $f$  – toutes cachées dans les urnes. La règle du jeu est que toutes les urnes de la couleur  $i$  contiennent le même nom-

bre  $n_f(f|i)$  de boules de la couleur  $f$  [en général, bien entendu,  $n_g(g|i) \neq n_f(f|i)$ ]. Prenant sans regarder une boule dans une urne, la probabilité jointe de toucher une urne  $i$  et une boule  $f$  est (5). Peu importe qu'on touche à la fois la boule et l'urne, ou bien l'urne d'abord et la boule ensuite; dans ce dernier cas (5) s'interprète soit comme *probabilité prédictive* de toucher une boule  $f$  si l'on a touché une urne  $i$ , soit comme *probabilité rétrodictive* d'avoir touché une urne  $i$  si l'on a touché une boule  $f$ .

La loi de composition des chaînes de Markov est

$$(6) \quad (f|i) = (f|g)(g|i)$$

avec sommation automatique sur l'indice répété  $g$ . De la loi de symétrie (2) et de l'hypothèse d'orthocomplémentarité (4) suit l'existence de *chaînes de Markov fermées*

$$(7) \quad \delta(i, i') = (i'|i) = (i'|f)(f|g)(g|\dots|h)(h|i).$$

## 2. LOSCHMIDT, 1876 ET BOLTZMANN, 1898:

### REVERSIBILITE DE LA PROBABILITE DE TRANSITION

Notant  $(i|f)$  la *probabilité de transition intrinsèque* entre un état initial  $i$  et un état final  $f$  dans le choc de deux molécules,  $n_i$  le *nombre d'occupation initial de l'état initial* et  $n_f$  le *nombre d'occupation final de l'état final*, la probabilité de transition "habillée" est (5). Aveuglés par le préjugé d'une causalité fléchée du passé vers le futur, les classiques multipliaient bien  $(i|f)$  par  $n_i$ , mais pas par  $n_f$ ; c'était tout à fait illogique, car la multiplication par  $n_i$  implique l'indiscernabilité des molécules, d'où il suit que la molécule transistante a  $n_f$  manières d'aboutir dans l'état  $f$ . L'expérience réfute le préjugé classique, et révèle qu'il existe deux types de particules: les *bosons*, tels que  $n_i, n_f = 0, 1, 2, \dots$ ; et les *fermions*, tels que  $n_i, n_f = 0, 1$ .

Lewis [4] dans un pénétrant article consacré à la symétrie passé-futur de droit, et à la relation entre information et entropie, esquisse la précédente argumentation, mais ne la pousse pas à son terme.

## 3. SYMETRIE DE DROIT ET DISSYMETRIE DE FAIT

Laplace, après avoir postulé la *symétrie de droit* (2), introduit la *dissymétrie de fait* exprimée par la non-multiplication par  $n_f$ ; l'hypothèse est que les différents "effets" considérés sont estimés équiprobables. Boltzmann [2], d'abord désarçonné par l'argument de Loschmidt [1], explique ensuite que les symétries intrinsèques des équations ne sont pas obligatoirement exigées des solutions; comme Laplace, il postule alors l'égalité de fait des  $n_f$ , en ajoutant qu'elle vaut pour  $f \neq i$ , ce qui est un postulat de *haute improbabilité* (ou de basse entropie) de l'état initial; il s'ensuit l'*irréversibilité de fait*, ré-examinée ultérieurement par de multiples auteurs, et qui équivaut à un *postulat de causalité retardée*.

## 4. BORN, 1926 ET JORDAN, 1927:

## CALCUL ONDULATOIRE DES PROBABILITES, CHAINES DE LANDE

Born [5], remarquant que le dualisme onde-corpuscule d'Einstein et de Louis de Broglie est un mariage du continu et de la discontinuité, recourt au calcul des probabilités comme à l'intermédiaire attitré en de telles affaires. Ce faisant, remarque Jordan [6], il révolutionne le calcul des probabilités en y remplaçant les lois d'additions des probabilités partielles et de multiplication des probabilités indépendantes par des lois *analogues* portant sur des *amplitudes ondulatoires*.

L'*amplitude conditionnelle*, ou *amplitude de transition* entre deux occurrences ou "états"  $i$  et  $f$ , est astreinte à la condition de symétrie

$$(8) \quad \langle f | i \rangle = \langle i | f \rangle^*,$$

et elle est reliée à la *probabilité de transition*, suivant

$$(9) \quad \langle f | i \rangle = |\langle f | i \rangle|^2.$$

Ainsi, la loi de combinaison des chaînes de Markov (7) se trouve remplacée par celle des *chaînes de Jordan, ou de Landé* [7] (le dernier auteur ayant très explicitement insisté sur cet aspect du problème)

$$(10) \quad \langle f | i \rangle = \langle f | g \rangle \langle g | i \rangle;$$

il y a sommation automatique sur  $g$ , et une définition appropriée du projecteur  $|g\rangle\langle g|$  est introduite dans chaque cas spécifique [8]. Introduisant alors une base orthonormée, il existe donc des *chaînes de Landé fermées* telles que

$$(11) \quad \delta(i', i) = \langle i' | f \rangle = \langle f | g \rangle \langle g | h \rangle \langle h | \dots | k \rangle \langle k | i \rangle.$$

## 5. NON-SEPARABILITE ET NON-LOCALITE QUANTIQUES

J'appelle *non-séparabilité quantique* toute conséquence de la présence des termes non diagonaux dans la formule (9), et *non-localité quantique* toute spécification de la précédente résultant d'une connotation spatiale, ou temporelle, ou spatio-temporelle attachée aux occurrences  $i$  et  $f$ , dites alors événements rattachés à des instants-points; dans ce dernier cas l'amplitude conditionnelle est un propagateur [8].

6. EXEMPLE DE NON-SEPARABILITE ET DE NON-LOCALITE:  
CORRELATIONS "EPR"

La formule, maintenant bien connue, des corrélations entre polarisation linéaires mesurées en  $L$  et  $N$  sur un paire de photons issus d'une cascade en  $S$ , ou préparées en  $L$  et  $N$  sur une paire de photons convergeant sur une cascade en  $S$  [9], est (dans le cas d'une transition "0 - 1 - 0")

$$(12) \quad \langle l | n \rangle = \langle n | l \rangle = \begin{cases} 2^{-1/2} \cos A & \text{si } l - n = 0 \\ 2^{-1/2} \sin A & \text{si } l - n = \pm 1 \end{cases}$$

c'est l'amplitude conditionnelle associant les paires de "réponses possibles"  $l, n = 0, 1$  à la "question qui est posée" à chacun des deux photons par un polariseur linéaire à deux voies orthogonales [10];  $A$  note l'angle, arbitrairement ajustable, entre les deux polariseurs; (9) est aussi l'amplitude de transition entre deux représentations du "système de spin 0" actualisées par les mesures faites en  $L$  et  $N$ .

Exactement la même formule convient au cas d'un seul photon traversant successivement deux polariseurs linéaires. *Mutatis mutandis* un discours similaire vaut pour une paire de fermions, ou pour un seul fermion, les mesures du spin étant alors effectuées par un "Stern-Gerlach".

L'amplitude conditionnelle considérée est donc la même, la séparation entre les mesures soit du genre espace, du genre lumière, ou du genre temps (passé ou futur).

En introduisant la collection des projecteurs orthogonaux  $|s\rangle \langle s|$  liés à la cascade ou à l'anticascade, la formule des chaînes de Landé

$$\langle l | n \rangle = \langle l | s \rangle \langle s | n \rangle$$

met en évidence le zigzag de Feynman  $LSN$  qui est, en termes spatio-temporels, le support de la corrélation. Ce zigzag lie donc deux événements aléatoires à séparation du genre et space au moyen d'un relais pris soit dans le passé, soit dans le futur.

L'hypothèse des "variables cachées locales" de Bell [11], expérimentalement réfutée, équivaut à substituer à la chaîne de Landé précédente une chaîne de Markov

$$\langle l | n \rangle = \langle l | s \rangle \langle s | n \rangle.$$

En effet, la formule bien connue de Bell

$$P(l \cap n) = \int d\lambda \rho(\lambda) L(l, \lambda) N(n, \lambda)$$

se réduit à la précédente par le changement de variables

$$ds = \rho(\lambda) d\lambda, \quad (l | s) = L(l, \lambda), \quad (s | n) = N(n, \lambda).$$

#### 7. LE CONCEPT DE LA CAUSALITE IDENTIFIEE A CELUI DE LA PROBABILITE CONDITIONNELLE

Ainsi défini, le concept est essentiellement indépendant de toute connotation temporelle, ou spatiale, ou spatio-temporelle; il est aussi défini (on l'a vu) comme essentiellement indépendant de "l'échange cause-effet": *les deux occurrences sont liées symétriquement*.

Si une connotation spatio-temporelle est attachée aux deux occurrences, qui deviennent alors des "événements", celle-ci est indépendante du genre "espace", ou "temps futur", ou "temps passé" de la séparation. Une telle philosophie de la probabilité et de la causalité est fondamentalement compatible avec celle de la géométrie spatio-temporelle de Poincaré — Minkowsky — comme le montre d'ailleurs la formalisation de ce schème en termes de "matrices  $S$ " selon Feynman.

Un mot doit être dit de la *CPT* invariance de Schwinger [12], Lüders [13] et Pauli [14].

Un principe de base de la "seconde quantification" est que l'émission d'une antiparticule et l'absorption d'une particule (ou vice-versa) sont mathématiquement équivalentes. Or, l'échange *émission-absorption* équivaut à l'inversion covariante du mouvement, notée *PT* (la forme "active" du retournement des quatre axes de l'espace-temps); c'est la version relativiste de la *T*-symétrie de Loschmidt. Donc, l'échange particule-antiparticule, noté *C*, équivaut par définition à *PT* [8].

#### 8. PARADOXALE SYNTHÈSE DU CALCUL ONDULATOIRE DES PROBABILITES ET DE LA GEOMETRIE SPATIO-TEMPORELLE

Rappelons que les définitions jointes de la *probabilités conditionnelle* et de la *causalité* sont posées au delà de toute connotation spatio-temporelle. Lorsqu'il en existe une, il s'agit seulement

d'un vêtement facultatif, et finalement symbolique (comme on va le voir). Par exemple, la transition entre une préparation et une mesure n'est rien de plus qu'une spécification du concept général de la *transition entre deux représentations d'un système*.

L'espace-temps, auquel recourt la mécanique quantique relativiste dans sa "description  $x$ " des phénomènes, n'est certainement pas objectif, du simple fait de sa "complémentarité" avec la "description  $k$ ", en quadri-fréquences; description  $x$  ou  $k$  sont des expressions symboliques commodes pour exprimer et calculer les transitions, qui ont lieu au delà de l'espace-temps.

Selon Bohr, le physicien se représente les appareils et les protocoles de préparation et de mesure en termes traditionnels, les incertitudes de Heisenberg étant macroscopiquement négligeables. L'occurrence aléatoire surgit à la zone frontière entre le microscopique; elle exprime, autant que faire se peut, un problème d'information: la séquence *préparation-évolution-mesure* des physiciens quantistes "correspond" à celle *codage-transmission-décodage* des informations, le "calcul ondulatoire" y remplaçant (bien entendu) le calcul classique des probabilités.

Rien ne peut être dit, et rien ne doit être pensé du "système transisant" entre préparation et mesure, que Wheeler [15] compare à un "dragon nébuleux". Une preuve très directe de cet interdit est la réfutation expérimentale de l'hypothèse des variables cachées de Bell.

Il s'ensuit que le concept même d'un "état  $\psi$  du système évoluant" entre préparation et mesure est un non-sens, au même titre que feu "l'éther luminifère". C'est un concept ambigu (quel est le bon  $\psi$ ? le retardé, ou l'avancé?) non invariant relativiste (ni Lorentz, ni *CPT*-invariant), pire que nuisible, "misleading" [16], [17].

*L'A et l' $\Omega$  de la mécanique quantique relativiste est l'amplitude de transition* ou "matrice  $S$ ": une "amplitude conditionnelle globale", Lorentz et *CPT*-invariante. C'est l'expression de la causalité physique.

## 9. UN TELEGRAPHE SPATIO-TEMPOREL A LA CYBERNETIQUE ONDULATOIRE

La conceptualisation est une chose, l'expérience vécue autre chose. Celle-ci est perçue en termes d'espace-temps, comme un échange d'informations au moyen d'ondes quantifiées.

*Lorentz-et-CPT-invariance* et *cybernetique ondulatoire* confèrent à ce "télégraphe spatio-temporel des propriétés bien plus subtiles que celles de nos télégraphes macroscopiques.

La radicale indescriptibilité du "dragon nébuleux" de Wheeler entre ses préparations et ses mesures (il y en a en général plusieurs, dans le schème de la matrice  $S$ ) amène à substituer à la traditionnelle "objectivité physique" une "intersubjectivité des abonnés du télégraphe" — un concept apparenté à la "maya" de l'Hindouisme.

Un important aspect de l'illusion macroscopique qui voile les aspects essentiels de l'interaction cosmos — observateur est l'irréversibilité de fait, dont l'expression la plus profonde est, selon Brillouin [18], la *prépondérance de l'information-connaissance sur l'information-organisation* (du "décodage" sur le "codage"). Considérée comme absolue, cette irréversibilité équivaut à une interdiction catégorique de "voir dans le futur et d'agir dans le passé":

Mais il est aujourd'hui bien connu que cette irréversibilité est "de fait et non de droit" (comme l'a reconnu Boltzmann [2], dès 1898). Le voile de la "maya" ne doit donc pas être absolument impenétrable, et la preuve la plus directe en est l'existence épisodique des "phénomènes paranormaux", qui sont de légères fluctuations anti-Carnot. Cette existence est essentiellement consonante au formalisme de la probabilité conditionnelle, surtout sous la forme "ondulatoire" que lui ont conférée Born et Jordan.

Laboratoire de Physique Théorique C.N.R.S.  
Institut Henri Poincaré - Paris

### REFERENCES

- [1] J. Loschmidt, *Sitz. Akad. Wiss. Wien* 73 (1876), p. 139.

- [2] L. Boltzmann, *Leçons sur la Théorie des Gaz*, trad. fr. Gauthier-Villars, Paris, 1902, t. 2, pp. 251-253.
- [3] L. Accardi, in S. Diner et al. (eds.), *The Wave Particle Dualism*, D. Reidel, Dordrecht, 1982, pp. 297-330.
- [4] G.N. Lewis, *Science* 71 (1930), p. 570.
- [5] M. Born, *Zeits. f. Phys.* 37 (1926), p. 863.
- [6] P. Jordan, *Zeits. f. Phys.* 40 (1927), p. 809.
- [7] A. Landé, *New Foundations of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1965, Chap. VI.
- [8] O. Costa de Beauregard, in *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, Physical Society of Japan ed., Tokyo, 1984, pp. 233-241; voir p. 239.
- [9] O. Costa de Beauregard, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983), p. 867.
- [10] A. Aspect et al., *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), p. 91.
- [11] J.S. Bell, *Physics* i (1965), p. 195.
- [12] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 82 (1951), p. 914.
- [13] G. Lüders, *Zeits. f. Phys.* 133 (1952), p. 325.
- [14] W. Pauli, in W. Pauli (ed.), *Niels Bohr and the Development of Physics*, Pergamon Press, London, 1955, pp. 30-51.
- [15] W.A. Miller et J.A. Wheeler, in *Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology*, Physical Society of Japan ed., Tokyo, 1984, pp. 140-152.
- [16] O. Costa de Beauregard, *Lett. Nuovo Cimento* 31 (1981), p. 43 et 36 (1983), p. 39.
- [17] Y. Aharonov et D.Z. Albert, *Phys. Rev.* D21 (1980), p. 3316 et D24 (1981), p. 359.
- [18] L. Brillouin, *Science and Information Theory*, Academic Press, New York, 1962<sup>2</sup>, Chap. 12.