1957 - 10

Extrait du *Cahier de Physique* n° 80
Avril 1957, pages 137-148

ISOMORPHISME DE LA DYNAMIQUE RELATIVISTE DES SYSTÈMES DE POINTS ET DE LA STATIQUE CLASSIQUE DES SYSTÈMES DE FILS

PAR

Olivier COSTA DE BEAUREGARD

Maitre de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique

SOMMAIRE. — *On met en évidence l'isomorphisme entre la dynamique relativiste du point et la statique classique du fil (voir tableau de correspondances* I), *entre la dynamique relativiste des systèmes de charges électrisées de Wheeler-Feynman* [11] *et la statique classique des systèmes de fils en interaction. Accessoirement, l'on discute de la définition covariante relativiste du barycentre* [9, 12] *et de l'énoncé relativiste des théorèmes généraux de la dynamique* [12], *puis de la relation entre l'irréversibilité macroscopique du rayonnement et celle de la thermodynamique.*

1. Dynamique relativiste du point et statique classique du fil. — Rappelons les équations fondamentales de la dynamique relativiste du point dénué de *spin* [12].

$$\mathrm{d}p_\lambda = F_\lambda\,\mathrm{d}s \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}p_\lambda = F_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^\mu\,; \tag{1}$$

$\mathrm{d}x_\lambda$, avec $\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$, et $x_4 = \mathrm{i}ct$, représente l'arc élémentaire de trajectoire d'espace-temps, $\mathrm{d}s$ sa longueur telle que

$$\mathrm{d}x_\lambda\,\mathrm{d}x^\lambda = -(\mathrm{d}s)^2\,, \tag{2}$$

u_λ le quadrivecteur unité tangent à la trajectoire

$$u_\lambda = \frac{1}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x_\lambda\,, \qquad u_\lambda\,u^\lambda = -1\,, \tag{3}$$

F_λ ou $F_{\lambda\mu} \equiv -F_{\mu\lambda}$ la force appliquée au point matériel, avec

$$F_\lambda \equiv F_{\lambda\mu}\,u^\mu\,, \qquad F_\lambda\,u^\lambda \equiv 0\,, \tag{4}$$

enfin $\mathrm{d}p_\lambda$, avec $p_u = m\,v_u$, $p_4 = \mathrm{i}cm = \frac{\mathrm{i}}{c}\,W$ et u, v, w = 1,2, 3, la variation d'impulsion-énergie corrélative au déplacement $\mathrm{d}x_\lambda$; dans tout ce qui précède, la convention de sommation sur indices muets d'Einstein est utilisée.

En l'absence de spin, le quadrivecteur p_λ est tangent à la trajectoire et, alors, nécessairement de longueur m_0 constante (en vertu de l'antisymétrie du tenseur $F_{\lambda\mu}$) :

$$p_\lambda = m_0\,u_\lambda\,, \qquad m_0 = \text{Cte}. \tag{5}$$

L'isomorphisme de la formule (1) avec celle de la statique classique des fils parfaits

$$\mathrm{d}\vec{T} = \vec{f}\,\mathrm{d}l \tag{6}$$

saute aux yeux : $\vec{T}$, tension du fil, tangente au fil ; $\mathrm{d}l$, élément de longueur ; $\vec{f}$, densité linéaire de force appliquée. L'on est même dans le cas plus restrictif où $\vec{f}$ est normale au fil et où $T = \mathrm{Cte}$.

Résumons dans le tableau I la correspondance que nous venons de mettre en évidence :

TABLEAU I

Espace euclidien tridimensionnel	Espace-temps pseudo-euclidien quadridimensionnel
Fil parfaitement flexible à tension scalaire constante	Trajectoire d'espace-temps d'un point matériel sans spin
Densité linéaire de force appliquée	Force appliquée d'espace-temps
Tension vectorielle	Impulsion-énergie
Problème de statique classique du fil	Problème de dynamique relativiste du point

Si le point matériel est doué de moment cinétique propre ou spin [5, 10, 12], le problème de sa dynamique transpose celui de la statique d'un fil présentant de la raideur. Les formules (1) à (4) restent valables, mais p_λ n'est plus colinéaire à u_λ. Par contre, il semble raisonnable de conserver l'hypothèse de l'antisymétrie du tenseur $F_{\lambda\mu}$.

En introduisant le moment cinétique propre du point matériel $S_{\lambda\mu} \equiv - S_{\mu\lambda}$ et le moment pondéromoteur propre $M_{\lambda\mu} \equiv - M_{\mu\lambda}$ ou $M_{\lambda\mu\nu} \equiv - M_{\mu\lambda\nu}$ tels que

$$M_{\lambda\mu} = M_{\lambda\mu\nu}\, u^\nu , \tag{7}$$

il faut adjoindre aux précédentes équations

$$p_\lambda\, \mathrm{d}x_\mu - p_\mu\, \mathrm{d}x_\lambda + \mathrm{d}S_{\lambda\mu} = M_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}s \equiv M_{\lambda\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\nu , \tag{8}$$

isomorphe à l'équation classique des fils raides

$$\vec{T} \wedge \vec{\mathrm{d}l} + \vec{\mathrm{d}\gamma} = \vec{\mu}\, \mathrm{d}l , \tag{9}$$

où $\vec{\mu}$ désigne la densité linéaire de moment pondéromoteur propre et $\vec{\gamma}$ la « raideur » du fil. Nous laissons au lecteur le soin de compléter, pour ce cas, le précédent tableau de correspondances.

2. Théorèmes généraux de la dynamique relativiste des systèmes de points (1) [9, 12]. — Soit d'abord, de manière abstraite, un système de torseurs d'espace-temps caractérisés chacun par sa résultante glissante p_λ et par son couple $s_{\lambda\mu} \equiv - s_{\mu\lambda}$. Définissons la somme du torseur résultant

(1) Nous nous avisons, en lisant le Traité de relativité restreinte de J. L. Synge [9], que cet auteur nous a devancé dans la théorie covariante du barycentre dont nous pensions être l'auteur [12].

$$P_\lambda = \sum p_\lambda \tag{10}$$

et introduisons les quatre coordonnées X_λ du barycentre, ainsi que les six composantes $S_{\lambda\mu} \equiv -S_{\mu\lambda}$ du couple résultant ; nous nous imposons à priori les quatre conditions, dont trois seulement sont indépendantes,

$$S^{\lambda\mu} P_\mu = 0 \tag{11}$$

et nous nous proposons de déterminer solidairement les dix X_λ et $S_{\lambda\mu}$, à un arbitraire près, au moyen des quatre équations (11) et des six relations

$$X_\lambda P_\mu - X_\mu P_\lambda + S_{\lambda\mu} = \sum(x_\lambda p_\mu - x_\mu p_\lambda + s_{\lambda\mu}). \tag{12}$$

L'on montre aisément [12] que ces 10 équations linéaires déterminent complètement le tenseur $S_{\lambda\mu} \equiv -S_{\mu\lambda}$ et qu'elles définissent pour le barycentre X_λ un axe de glissement parallèle à P_λ. Autrement dit, le torseur résultant est complètement défini par sa résultante glissante P_λ et par son couple résultant $S_{\lambda\mu} \equiv -S_{\mu\lambda}$.

Si, maintenant, nous supposons que les p_λ, du genre temps et pointant vers le futur, représentent les impulsions-énergies d'un essaim de points sans interaction en mouvement inertial, et les $s_{\lambda\mu}$ les spins de ces points, alors P_λ, du genre temps et pointant vers le futur, sera l'impulsion-énergie totale de l'essaim, X_λ son barycentre, $S_{\lambda\mu}$ le moment cinétique (S_{uv}) et barycentrique (S_{u4}) autour du barycentre (u, v, w = 1, 2, 3) ; la dernière dénomination résulte de l'expression du tenseur orbital

$$x_\lambda p_\mu - x_\mu p_\lambda = \begin{cases} x_u p_v - x_v p_u \\ \mathbf{i} c\, m(x_u - v_u t) \end{cases} ; \tag{13}$$

si l'on prend le point x au même instant que l'origine des coordonnées, les trois dernières expressions se réduisent, au facteur $\mathbf{i}c$ près, aux classiques mx_u.

Nous dirons encore que l'essaim des points à spin équivaut à un unique point à spin dont l'instant-point est le barycentre X_λ, l'impulsion-énergie P_λ et le spin $S_{\lambda\mu}$.

En nous plaçant dans le repère galiléen propre du barycentre, où

$$P_u = 0 \quad \text{et} \quad S_{u4} = -S_{4u} = 0, \tag{14}$$

nous trouvons aisément la relation

$$M_0 X_0^u = \sum \left\{ m_0(x_0^u - v_0^u t) + \frac{1}{\mathbf{i}c} s_0^{u4} \right\} ; \tag{15}$$

en l'absence de spins ($s^{\lambda\mu} = 0$) et en prenant tous les points au même instant que le barycentre ($t = 0$), nous retrouvons bien la formule classique

$$M_0 X_0^u = \sum m_0 x_0^u . \tag{16}$$

Maintenant, nous devons prendre en considération l'interaction des n points, qui se traduit par l'existence d'un champ physique en tout instant-point. A celui-ci seront associés un tenseur d'impulsion-énergie potentielle $T_{\lambda\mu}(x)$, non nécessairement symétrique (tenseur de Maxwell-Minkowski dans le cas électromagnétique), et peut-être une densité de spin potentiel $\sigma_{\lambda\mu\nu} \equiv -\sigma_{\mu\lambda\nu}$ (introduite en électromagnétisme par E. Henriot [4]).

L'on démontre alors [12] sous certaines hypothèses très générales, incluant le principe dynamique de d'Alembert, les deux relations tensorielles suivantes, où P^{λ}_{0} et $S^{\lambda\mu}_{0} = - S^{\mu\lambda}_{0}$ désignent deux tenseurs constants,

$$\left\{ \sum p^{\lambda} + \iiint T^{\lambda\mu}\, d\sigma_{\mu} \right\}_{\sigma} = P^{\lambda}_{0}, \tag{17}$$

$$\left\{ \sum \left[x^{\lambda} p^{\mu} - x^{\mu} p^{\lambda} \right] + \iiint \left[x^{\lambda} T^{\mu\nu} - x^{\mu} T^{\lambda\nu} \right] d\sigma_{\nu} \right\}_{\sigma} = S^{\lambda\mu}_{0}; \tag{18}$$

σ désigne une hypersurface arbitraire du genre espace continûment variable, $d\sigma_{\nu}$ son quadrivecteur élément de volume.

Ces deux formules résument les théorèmes généraux de la dynamique relativiste des systèmes de points en interaction.

I. *En l'absence de forces extérieures, l'impulsion-énergie totale du système points + champ, dite encore impulsion-énergie du barycentre, est conservative.*

Pour $\lambda = 4$, l'on obtient à la fois l'énoncé du théorème (et non plus du principe) de la conservation de la masse totale et celui des forces vives. Par rapport à la mécanique newtonienne, les deux nouveautés sont la considération d'une *masse potentielle* corollaire de l'énergie potentielle (bien connue des bilans de chimie nucléaire) et celle de la loi de répartition de l'énergie et de la masse potentielles dans le champ.

Pour $\lambda = 1, 2, 3$ l'on a l'expression relativiste du théorème de la quantité de mouvement. Le postulat newtonien de l'égalité à distance de l'action et de la réaction est rejeté comme dénué de sens à l'approximation relativiste ; à sa place est introduite la notion d'une impulsion potentielle répartie dans le champ (introduite en électromagnétisme par Poincaré).

II. *En l'absence de forces extérieures, le moment cinétique et barycentrique autour du barycentre, dit encore spin du barycentre, est conservatif.*

L'on a ici un « spin cinétique » dû aux points et un « spin potentiel » dû au champ, comportant l'un et l'autre un terme orbital et un terme propre.

III. *En l'absence de forces extérieures, la trajectoire d'espace-temps du barycentre du système points + champ est une droite du genre temps, parallèle à l'impulsion-énergie totale.*

Incidemment, nous avons démontré que, dans le mouvement inertial du point doué de spin, les deux quadrivecteurs P_{λ} et U_{λ} sont colinéaires ; l'hypothèse (11) équivaut alors à la suivante

$$S^{\lambda\mu}\, U_{\mu} = 0\,, \tag{19}$$

qu'on doit effectivement poser pour le mouvement général du point doué de spin [5, 10].

Ces théorèmes généraux sont peut-être élégants, mais ils sont certainement inutilisables. La raison en est qu'un problème de dynamique des champs s'y trouve imbriqué avec le problème de dynamique des points.

La dynamique newtonienne résolvait par prétérition ce problème de dynamique des champs, en faisant implicitement le corps d'approximations suivantes :

transmission instantanée de l'interaction (corollaire du postulat du temps universel),

égalité à distance de l'action et de la réaction (corollaire du postulat précédent).

absence d'un équivalent massique de l'énergie potentielle, rendant inutile la spécification de sa loi de répartition dans le champ.

Tous ces postulats revenaient, en des sens divers, à prendre $1/c \simeq 0$; c'était un corps d'approximations cohérentes, et légitimes en son domaine, mais interdites à la Relativité par définition même.

Ce sont Wheeler & Feynman [11] qui, dans le cas de l'électromagnétisme, ont montré le moyen de sortir de cette impasse, en produisant à la fois des idées très originales et des calculs extrêmement ingénieux.

3. **Théorie de l'interaction électromagnétique de Wheeler & Feynman** [11]. **Idées générales.** — Wheeler & Feynman (W. F.) raisonnent dans le cas de l'interaction électromagnétique entre charges ponctuelles ; mais il semble bien que leurs idées et leurs résultats généraux aient valeur d'exemple normatif pour la « mécanique rationnelle relativiste des systèmes de points en interaction » qui n'est pas encore achevée.

Retrouvant au passage et systématisant un certain nombre d'idées et de résultats antérieurs de Schwarzschild, Tetrode, Fokken, Frenkel, Dirac, W. F. adoptent les trois postulats de base suivants :

I. *Absence de self-action des charges élémentaires, qui sont supposées ponctuelles.* La suite montrera que, sur ce point, la théorie n'est consistante que dans l'hypothèse où toute l'interaction se propage à la vitesse limite c ou, si l'on préfère, en termes de théorie quantique, que si la masse propre du photon est supposée rigoureusement nulle. Il y a donc certainement lieu de prévoir une généralisation de la théorie originale de W. F. sur ce point, pour l'adapter à d'autres types d'interaction [3].

Même en supposant nulle la masse propre du photon, la théorie quantique affirme l'existence d'effets observables de la self-impulsion-énergie et de la self-charge des particules chargées. Sous ce rapport, le postulat I de W. F. représente donc une approximation, légitime à l'échelle de la physique macroscopique, où les effets de self-induction quantique sont négligeables.

II. *Le potentiel créé par une charge ponctuelle l'est suivant une loi symétrique entre passé et futur ; en fait, il est la demi-somme des potentiels retardé et avancé.*

Ce postulat II de W. F. a fait couler beaucoup d'encre, car il semble contredire un nombre immense de faits bien établis par l'expérimentation macroscopique, comme le ferait l'énoncé du premier principe de la thermodynamique si l'on oubliait de formuler aussitôt le second. Or, pour des raisons qu'il serait trop long de développer ici et qui feraient l'objet d'un exposé d'importance comparable à celui-ci, nous sommes [14] indépendamment arrivé à des conclusions entièrement compatibles avec celles de W. F. : aussi bien en mécanique statistique classique qu'en théorie du rayonnement, les phénomènes élémentaires doivent être complètement symétriques entre avenir et passé ; c'est seulement dans la moyenne statistique d'un nombre immense de phénomènes élémentaires que doit apparaître la dyssymétrie macroscopique entre avenir et passé, que nous connaissons si bien en thermodynamique et en théorie des ondes, pour ne prendre que deux exemples importants. Selon nous, l'irréversibilité de la thermodynamique et celle de la théorie des ondes macroscopiques sont en connexion très intime (²) ; et elles ne sont que deux manifestations différentes d'une même mécanique statistique macroscopique, dont la vraie mécanique élémentaire est la mécanique ondulatoire, appliquée aux particules dites matérielles d'une part, aux photons de l'autre.

Pour en revenir à notre problème de la mécanique rationnelle relativiste, le but du postulat II de W. F. est clair : il s'agit de recréer ici l'une des conditions essentielles du succès de la mécanique newtonienne, savoir le caractère conservatif des systèmes isolés. Si nous voulons que l'impulsion-énergie d'un système fini de charges ponctuelles, qui n'interagissent qu'entre elles, se conserve, il faut que le rayonnement ne la dissipe pas, comme ce serait le cas si le potentiel était totalement retardé.

Vu sous l'angle quantique, le postulat II de W. F. revient à ne retenir que l'émission-absorption de photons dits « virtuels », qui ne s'échappent pas du système ou ne lui arrivent pas du dehors ; c'est en somme un postulat d'exclusion des photons réels. A ce titre, la théorie obtenue sera macroscopiquement correspondante, au sens de Bohr, de la théorie quantique de l'*interaction* entre charges, dont on sait bien, précisément, qu'elle implique partout la demi-somme des potentiels avancé et retardé. C'est du reste le simple bon sens qui dit que, si l'on ne retient dans la théorie que les photons émis, puis réabsorbés dans le système, tout le processus est temporellement symétrique. Comme en thermodynamique, l'irréversibilité du rayonnement n'apparaîtra que dans une seconde étape avec la prise en considération des photons réels, existant initialement ou finalement à l'état libre, et qu'avec la statistique macroscopique de ceux-ci.

Mais, précisément, la théorie du rayonnement de W. F., qui est une théorie relativiste classique, ignore la notion quantique du *photon* ; elle ne peut donc pas faire explicitement la statistique des photons. Le but du postulat III de W. F. est de tourner élégamment cette difficulté ; les conséquences qu'ils en déduisent forment un bel exemple de virtuosité théoricienne mais, physiquement parlant, l'explication proposée de l'irréversibilité reste symbolique car, comme nous le disions, c'est dans la statistique des grands ensembles de photons que réside la clé du problème.

III. *L'univers physique, identifié théoriquement à un vaste essaim de charges ponctuelles en interaction, est supposé n'émettre aucun rayonnement vers l'espace extérieur, ni n'en recevoir aucun.* W. F. démontrent alors ceci : tant qu'on ne considère pas l'interaction du système charges + champ électromagnétique avec un autre champ physique (c'est l'hypothèse explicitement faite), la description nouvelle par potentiels semi-retardés et semi-avancés, sans l'introduction de forces réactives de Lorentz, est strictement équivalente à la description classique par potentiels totalement retardés avec forces réactives de Lorentz, ou encore à une description anti-classique par potentiels totalement avancés avec forces de Lorentz changées de signe.

(²) Voir, sur le même sujet, Ritz [7] et Ritz & Einstein [8].

Naturellement cette latitude, ou ce jeu tout à fait libre du « premier principe » de la théorie du rayonnement, disparaît aussitôt qu'il y a couplage entre le champ électromagnétique et un autre champ physique. L'on n'a jamais observé que le fonctionnement d'une station de radio se traduise par la convergence d'une onde avancée reçue par l'antenne et par la récolte d'une énergie de forme non électro-magnétique ; ou plutôt, lorsque ce phénomène se manifeste en effet dans un ensemble de postes récepteurs, c'est toujours en liaison avec une beaucoup plus grande dépense d'énergie dans un poste émetteur et, finalement, avec la présence d'une onde divergente retardée s'échappant de tout le système. Autrement dit, dès qu'il y a couplage entre le champ électromagnétique et un autre champ physique, un « second principe », d'inspiration similaire à celui de Carnot, vient supprimer toute une moitié des phénomènes, qui seraient permis par le premier principe, et exclure cet univers paradoxal, considéré notamment par Poincaré [6], où les diverses forces de frottement seraient accélérantes au lieu d'être amortissantes, où les ondes seraient convergentes au lieu d'être divergentes, où les températures iraient se différenciant au lieu de s'égaliser, où toute prédiction deviendrait hypothétique mais où la rétrodiction se ferait à coup sûr [3], et où la causalité généralisée que nous connaissons serait remplacée par une finalité généralisée.

Cette irréversibilité liée au couplage entre le champ électromagnétique et un autre champ physique rappelle fortement, par analogie, celle qui est liée aux transitions entre les formes non calorifiques de l'énergie et la chaleur. Selon nous, ces deux catégories de phénomènes sont en connexion intime et relèvent l'une et l'autre de la mécanique statistique. Il n'y a cependant pas identité entre elles, car le rayonnement électromagnétique ici considéré n'est pas le rayonnement d'équilibre thermique : il se fait suivant un spectre quelconque.

Mais il reste que le phénomène, si général, de l'exclusion macroscopique des ondes convergentes au profit des ondes divergentes est un maillon de ce qu'on appellerait volontiers le réseau hydrographique universel de l'entropie croissante. Le rayonnement d'équilibre thermique représente, en théorie du rayonnement, un état provisoirement final de cet universel écoulement, là où un petit barrage a momentanément arrêté le flot.

Interrompons ici ces remarques, qui étaient nécessaires, et revenons à notre problème de la mécanique rationnelle relativiste des systèmes de points.

4. **La dynamique relativiste des charges ponctuelles de Wheeler & Feynman** [11]. — Soit Q_a une charge électrique ponctuelle située en l'instant-point a_λ ; $\delta(x)$ désignant la fonction singulière de Dirac, on voit aisément que la « densité de courant charge » j_λ associée à sa trajectoire d'espace-temps $\mathfrak{C}$ est

$$j_\lambda(x) = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_1^4 \delta(x_\mu - a_\mu)\, da_\lambda . \tag{20}$$

Quant au potentiel A_a^λ créé par cette charge, W. F. adoptent la formule

(3) Il faut remarquer que, dans notre univers, c'est grâce à notre mémoire seulement ou à la trace écrite des documents, que nous « rétrodisons » à coup sûr. Là où mémoire et documents font défaut, la rétrodiction est très largement hypothétique. Qu'on pense, par exemple, aux théories de l'origine du système planétaire ou à la difficulté de n'importe quel problème de probabilité des causes. La prédiction statistique, au contraire, est certaine.

$$A_a^\lambda(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r^2)\, da^\lambda\,, \tag{21}$$

avec

$$r^2 \equiv (x^\lambda - a^\lambda)\,(x_\lambda - a_\lambda). \tag{22}$$

L'on montre aisément [11, 13] que cette formule équivaut à la suivante

$$A^\lambda(x) = \frac{1}{2}\left[A_{\text{ret}}^\lambda\,(x) + A_{\text{av}}^\lambda\,(x)\right], \tag{23}$$

où A_{ret}^λ et A_{av}^λ désignent les potentiels retardé et avancé de Liénart-Wiechert,

$$A_{\text{ret, av}}^\lambda = \frac{Q}{4\pi}\,\frac{\dot a^\lambda}{\dot a_\mu(x^\mu - a^\mu)_{\text{ret, av}}}\,; \tag{24}$$

les dérivées pointées sont prises par rapport à un paramètre unicursal α de la trajectoire $\mathcal{C}_a$, et $x^\mu - a^\mu$ désigne un quadrivecteur isotrope. Un calcul simple conduit au résultat

$$\partial_\lambda A^\lambda = \left\{-\frac{Q}{4\pi}\,\delta(r^2)\right\}_{-\infty}^{+\infty}; \tag{25}$$

la condition de Lorentz est donc satisfaite en tout instant-point à distance finie, s'il n'y a pas de trajectoires $\mathcal{C}$ à l'infini.

En mécanique analytique du point chargé, il est classique d'introduire l'impulsion-énergie électromagnétique

$$\overset{*}{p}{}_a^\lambda \equiv -\,Q_a\,A_{(a)}^\lambda\,, \tag{26}$$

où $A_{(a)}^\lambda$ désigne le potentiel créé en a par toutes les charges autres que Q_a, puis l'impulsion-énergie combinée

$$P_a^\lambda = p_a^\lambda + \overset{*}{p}{}_a^\lambda\,; \tag{27}$$

on sait [12] que les équations du mouvement de la charge ponctuelle peuvent s'écrire

$$dP_a^\lambda = -\,Q_a\,\partial^\lambda A_{(a)}^\mu\,da_\mu\,. \tag{28}$$

Considérons maintenant, pour simplifier le discours, le cas de deux charges ponctuelles seulement, a et b, en interaction. Un calcul simple conduit W. F. aux formules très intéressantes, où δ' désigne la dérivée de δ relativement à r^2,

$$\left\{\begin{aligned} dP_a^\lambda &= \frac{Q_a\,Q_b}{2\pi}\int_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \delta'(r^2)\,r^\lambda\,da_\mu\,db^\mu\,,\\ dP_b^\lambda &= -\frac{Q_a\,Q_b}{2\pi}\int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \delta'(r^2)\,r^\lambda\,da_\mu\,db^\mu\,, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

qui, compte tenu de ce que

$$\int_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \delta'(r^2)\, r^\lambda\, \mathrm{d}b_\lambda\, \mathrm{d}a^\mu = 0, \tag{30}$$

sont équivalentes aux suivantes :

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{d}p_a^\lambda &= \frac{Q_a Q_b}{2\pi} \int_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \delta'(r^2) \left\} r^\lambda\, \mathrm{d}a_\mu\, \mathrm{d}b^\mu - r^\mu(\mathrm{d}a_\mu\, \mathrm{d}b^\lambda + \mathrm{d}b_\mu\, \mathrm{d}a^\lambda) \right\{, \\ \mathrm{d}p_b^\lambda &= -\frac{Q_a Q_b}{2\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \delta'(r^2) \left\} r^\lambda\, \mathrm{d}a_\mu\, \mathrm{d}b^\mu - r^\mu(\mathrm{d}a_\mu\, \mathrm{d}b^\lambda + \mathrm{d}b_\mu\, \mathrm{d}a^\lambda) \right\{. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons d'abord, en nous reportant à la formule (1), que les intégrands des formules (29) ou (31) ont bien la forme canonique d'une force d'espace-temps, asymétrique avec l'écriture (29), et, en ce qui concerne la contribution active compte tenu de (30), antisymétrique avec l'écriture (31) ; la constance des modules des p^λ, c'est-à-dire des masses propres, est donc automatiquement assurée.

La version relativiste du principe de l'action et de la réaction consiste en ce que les intégrands des deux formules (29) ou (31) sont, avec des signes opposés, les mêmes.

Si nous reprenons maintenant le problème-image des fils en interaction statique, ainsi que le tableau I de correspondances, nous voyons que les équations (29) ou (31) sont bien telles que chaque élément d'un fil soit en interaction avec chaque élément de l'autre fil, la force mutuelle (action et réaction) de deux éléments de fil étant proportionnelle aux longueurs de ces deux éléments et, par ailleurs, fonction de leur distance r ainsi que des angles que font entre eux les trois vecteurs r_λ, $\mathrm{d}a_\lambda$, $\mathrm{d}b_\lambda$. La situation rappelle donc parfaitement celle, par exemple, de deux fils métalliques parcourus par des courants électriques d'intensités constantes.

Mais dans le cas, ici réalisé, où toute l'interaction se propage à la vitesse limite c, le problème de la dynamique relativiste des points se trouve finalement plus simple que le problème de la statique classique des fils : en effet, la fonction de la distance étant $\delta(r^2)$ ou une dérivée de $\delta(r^2)$, chaque point d'un fil ne se trouve en interaction qu'avec deux points de l'autre fil, ceux qui sont « en onde » avec lui. Dans le cas relativiste général, il y aurait interaction entre tous les éléments de fils séparés par des intervalles du genre temps et, en particulier, entre tous les éléments d'un même fil, qui satisfont précisément à cette condition ; la seconde grande simplification est donc ici qu'il n'y a pas de self-action d'un fil sur lui-même. Tout ceci fait qu'il y aurait lieu d'attaquer d'abord le problème de la dynamique des points, dans l'hypothèse simple où l'interaction se propage à la vitesse limite c, c'est-à-dire dans l'hypothèse où la masse propre des corpuscules de champ est nulle, avant d'aborder le problème plus général où c est la limite supérieure de la vitesse d'interaction, aussi bien que le problème classique de la statique des fils.

Sous la forme (29), les tensions ne sont pas tangentes aux fils, qui ont donc de la « raideur ». Sous la forme (31), au contraire, les tensions sont non seulement tangentes aux fils, mais constantes en module, avec des valeurs imposées : l'on est alors dans le cas de fils parfaitement flexibles, avec une densité linéaire de force normale au fil.

Le problème à résoudre est manifestement un problème variationnel. Il faudra faire varier les figures des fils en maintenant [sous la forme (31)] la tension constante à sa valeur imposée. Les conditions aux limites sont les suivantes : chaque fil pourra être astreint à passer par deux points choisis d'avance (séparés par un intervalle du genre temps) ou bien par un point choisi d'avance avec la tangente correspondante (du genre temps).

W. F. ont encore démontré, ou redonné, d'autres résultats qui sont des aides pour l'attaque de ce problème variationnel. Introduisons avec eux l'opérateur, où α et β désignent deux paramètres unicursaux des trajectoires de a et de b,

$$\text{(32)} \qquad \Big[\quad\Big] \equiv \Big[\int_{\alpha}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{\beta}^{+\infty}\Big]$$

et appliquons-le aux intégrands des équations (29) et (31), que nous désignerons respectivement par $(\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta)^{\lambda}$ et $\Big\{\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta\Big\}^{\lambda}$; nous allons voir que les expressions

$$\text{(33)} \qquad P^{\lambda}_{a,\,b} = \Big[\quad\Big](\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta)^{\lambda} \,,$$

$$\text{(34)} \qquad p^{\lambda}_{a,\,b} = \Big[\quad\Big]\Big\{\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta\Big\}^{\lambda} \,,$$

représentent l'impulsion-énergie d'interaction des deux charges ponctuelles, définie à une constante additive près. En effet, un calcul simple conduit aux résultats, que nous écrivons pour le cas général de n points,

$$\text{(35)} \quad \sum_a P^{\lambda}_a + \sum_{a\neq b} P^{\lambda}_{a,\,b} = P^{\lambda}_0 \,, \qquad \text{(36)} \quad \sum_a p^{\lambda}_a + \sum_{a\neq b} p^{\lambda}_{a,\,b} = p^{\lambda}_0 \,;$$

P^{λ}_0 ou p^{λ}_0 représente l'impulsion-énergie totale du système charges + champ d'interaction, définie à une constante additive près. L'analogie de ces expressions avec celle de l'énergie totale en mécanique newtonienne des n points interagissant deux à deux est frappante.

Voici maintenant le principe d'action stationnaire de Fokker [1]. Posons pour l'action totale du système

$$\text{(37)} \quad \mathcal{A} = \sum_a \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\lambda}\, \mathrm{d}a^{\lambda} + \sum_{a\neq b} \frac{Q_a\, Q_b}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r^2)\, \mathrm{d}a_{\lambda}\, \mathrm{d}b^{\lambda} \,;$$

en variant une seule des trajectoires $\mathcal{T}$ entre deux instants-points 1 et 2, l'on trouve

$$\text{(38)} \qquad \delta_{(a)}\, \mathcal{A} = \delta \int_1^2 \left(p^{\lambda}_a - Q_a\, A^{\lambda}_{(a)}\right) \mathrm{d}a_{\lambda} \equiv \delta \mathcal{A}_a \,;$$

c'est une expression classique en mécanique analytique relativiste de la charge ponctuelle, et il est bien connu [12] que la condition

$$\delta \mathcal{A}_a = 0 \tag{39}$$

équivaut aux équations du mouvement de cette charge dans le champ des autres charges.

C'est certainement ce théorème élégant de Fokker qui est la clé du problème considéré. On peut remarquer que l'action totale de Fokker est constituée de manière analogue à l'énergie totale de la mécanique newtonienne des points interagissant deux à deux. Ceux qui connaissent la mécanique quantique verront aussi que le terme en $\sum\limits_{a \neq b}$ de Fokker est le correspondant macroscopique, au sens de Bohr, de l'élément de matrice de Möller pour l'interaction électromagnétique des particules chargées.

Il va sans dire que ces théorèmes de Wheeler-Feynman et de Fokker ont leurs analogues en statique classique des fils.

5. **Equivalence entre les énoncés de Wheeler-Feynman et ceux de la théorie des champs résumée au paragraphe** 2. — Elle a été démontrée par W. F. eux-mêmes [11]. Il faut avant tout remarquer que la constante arbitraire impliquée dans l'impulsion-énergie totale a pour corollaire un terme additif arbitraire de divergence nulle dans le tenseur $T^{\lambda\mu}$ du champ d'interaction. Dans le cas électromagnétique, ce tenseur d'interaction est le tenseur bien connu de Maxwell-Minkowski qui, on le sait, est quadratique en le champ électromagnétique d'espace-temps $B^{\lambda\mu}$. Désignons symboliquement ce tenseur, dont l'expression explicite est bien connue [12], par $(B.\ B)^{\lambda\mu}$.

Par un ingénieux calcul direct, W. F. ont démontré que le tenseur de Maxwell qui, avec la technique du paragraphe 2, donne identiquement le résultat (33) ou (34) est le suivant :

$$T^{\lambda\mu}_{\mathrm{WF}} = \Big(\sum_{a \neq b} \underline{B}_a\, \overline{B}_b\Big)^{\lambda\mu} ; \tag{40}$$

par $\underline{B}_a$ et $\overline{B}_b$, nous entendons respectivement le champ retardé créé par la charge Q_a et le champ avancé créé par la charge Q_b ; la symétrie par rapport aux diverses charges est assurée par la sommation Σ.

Frenkel [2], quant à lui, avait proposé un autre tenseur de Maxwell, savoir

$$T^{\lambda\mu}_{\mathrm{F}} = \Big(\sum_{a \neq b} B_a\, B_b\Big)^{\lambda\mu} , \tag{41}$$

où B_a et B_b désignent les potentiels semi-avancés et semi-retardés créés par les charges Q_a et Q_b ; W. F. démontrent que les impulsions-énergies totales associées aux tenseurs (40) et (41) diffèrent (dans le cas de deux charges) par la constante

$$\Delta P^{\lambda}_{a,\,b} = Q_a\, Q_b \iint \pm\, \delta'(r^2)\, r^{\lambda}\, \mathrm{d}a_{\mu}\, \mathrm{d}b^{\mu} , \tag{42}$$

où le signe change avec celui de la quatrième composante du vecteur isotrope r^{λ}.

La différence entre les deux tenseurs (40) et (41) est effectivement un tenseur de divergence identiquement nulle, qui, par ailleurs, s'introduit dans la théorie de l'irréversibilité du rayonnement de Wheeler & Feynman.

Manuscrit reçu le 4 février 1957.

RÉFÉRENCES

[1] A. D. FOKKER, *Zeits. Physik*, t. **58**, 1929, p. 386; *Physica*, t. **9**, 1929, p. 33 et t. **12**, 1932, p. 145.
[2] J. FRENKEL, *Zeits. Physik*, t. **32**, 1925, p. 518.
[3] P. HAVAS, *Phys. Review*, t. **87**, 1952, p. 309 et t. **91**, 1953, p. 997.
[4] E. HENRIOT, Les couples de radiation et les moments électromagnétiques, Mémorial Sc. phys., n° 30, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1936.
[5] M. MATHISSON, *Acta phys. Polon.*, t. **6**, 1937, p. 163 et 218.
[6] H. POINCARÉ, Science et méthode, éd. Flammarion, Paris, 1896, p. 129-130.
[7] W. RITZ, *Ann. Chim. et Phys.* t. **13**, 1908, p. 145.
[8] W. RITZ & A. EINSTEIN, *Phys. Zeits.*, t. **10**, 1909, p. 323.
[9] J. L. SYNGE, Relativity, the special theory, éd. North Holland Publishing C°, Amsterdam, 1956, chap. 7.
[10] J. WEYSSENHOF, *Acta phys. Polon.*, t. **9**, 1947, p. 7 et 26.
[11] J. A. WHEELER & R. P. FEYNMAN, *Rev. mod. Physics*, t. **17**, 1945, p. 157 et t. **21**, 1949, p. 425.
[12] O. COSTA DE BEAUREGARD, La théorie de la relativité restreinte, éd. Masson, Paris, 1949, pp. 82-84, 103-106, 122-125, 125-132, 152.
[13] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Rev. scient.*, t. **88**, 1950, p. 34.
[14] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Rev. Quest. sci.*, avril 1952, p. 171; *apud* A. GEORGES, L. de Broglie, physicien et penseur, Paris, éd. A. Michel, 1953, p. 401; *C. r. Ac. Sc.*, t. **236**, 1953, p. 666, t. **241**, 1955, p. 1721 et t. **243** 1956, p. 1728.